私の数学散歩道（30）

幾分難解な三角方程式について (2)

数実研会員　村田　洋一

（作成の背景）

今回 下記の方程式を考えました。三角級数の和を求めるにあたり 複素数を使ってみました。問題作成に至った経緯は下記の通りです。

（問　題）次の三角方程式を解け。但し、何れも $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx=\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cdots+\cos nx$ ：①

（経　緯）

(1) $\sin x=\cos x$ の解は $x=\dfrac{\pi}{4}$ $(n=1)$, $\sin x+\sin 2x=\cos x+\cos 2x$ （$n=2$）・・・これを発展させ ① としたときの解はどうなるでしょうか

$n=2$ のときは　和積の公式より 共通因数を除き計算すると

$$\sin\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)=0\qquad \frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4}=0\qquad x=\frac{\pi}{6}$$

$n=3$ のときも同様に $2\sin 2x\cos x+\sin 2x=2\cos 2x\cos x+\cos 2x$

$(\sin 2x-\cos 2x)(2\cos x+1)=0$　$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ より $\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$　$x=\dfrac{\pi}{8}$

$n=4$ のときは　同様に $x=\dfrac{\pi}{10}$ (解法 略)

これから類推した(1)の解は $x=\dfrac{\pi}{2(n+1)}$ と考えられます。

（証　明）

ではこれを証明してみましょう。 $z=\cos x+i\sin x$ とおいて

$z+z^2+z^3+\cdots+z^n=\dfrac{z(1-z^n)}{1-z}$ より

左辺＝$\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx+i(\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx)$

右辺＝$\dfrac{(\cos x+i\sin x)(1-\cos nx-i\sin nx)}{(1-\cos x)-i\sin x}$　・・・②

分母を有理化するため、②の分母子に $(1-\cos x)+i\sin x$ を掛けて

分母＝$(1-\cos x)^2+\sin^2 x=2(1-\cos x)=4\sin^2\dfrac{x}{2}$

分子＝$\{(1-\cos x)+i\sin x\}(\cos x+i\sin x)\{(1-\cos nx)-i\sin nx\}$

$=\cos x(1-\cos x)(1-\cos nx)+\cos x\sin x\sin nx+(1-\cos x)\sin x\sin nx-\sin^2 x(1-\cos nx)$

$+i(\sin x(1-\cos x)(1-\cos nx)+\sin^2 x\sin nx+\cos x\sin x(1-\cos nx)-\cos x(1-\cos x)\sin nx)$

分子実数部＝

$$\cos x-\cos x\cos nx-\cos^2 x+\cos^2 x\cos nx+\cos x\sin x\sin nx+\sin nx\sin x$$

$$-\sin x\cos x\sin nx-\sin^2 x+\sin^2 x\cos nx=\cos x-1+\cos nx-\cos(n+1)x$$

$$=-2\sin\frac{2n+1}{2}x\sin(-\frac{x}{2})-2\sin^2\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}(\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin\frac{x}{2})$$

$$=4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}$$

分子虚数部=

$$\sin x-\cos nx\sin x-\sin x cosx+\sin x\cos x\cos nx+\sin^2 x\sin nx+\sin x\cos x-\sin x\cos x\cos nx$$
$$-\cos x\sin nx+\cos^2 x\sin nx=\sin x+\sin nx-\sin(n+1)x$$

$$=2\cos\frac{2n+1}{2}x\sin(-\frac{x}{2})+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x)$$

$$=4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}$$

これから②の右辺＝$\dfrac{4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}+4i\sin\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}}$

実数部と虚数部を比較して

$$\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\qquad\cdots③$$

$$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\qquad\cdots④$$

①より　$\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$　$\sin\frac{x}{2}\neq 0$　$\sin\frac{nx}{2}\neq 0$ であるから

$\cos\dfrac{(n+1)x}{2}=\sin\dfrac{(n+1)x}{2}$ を解けばよい。

$$\cos\frac{(n+1)x}{2}-\sin\frac{(n+1)x}{2}=-\sqrt{2}\sin(\frac{(n+1)x}{2}-\frac{\pi}{4})=0$$

$\dfrac{(n+1)x}{2}-\dfrac{\pi}{4}=0$ から　$x=\dfrac{\pi}{2(n+1)}$ で当初の推定が成り立つ。　（証明終り）

（③、④の別解）各三角数列の両辺に $\sin\frac{1}{2}x(\neq 0)$ を掛けて計算するのはよく知られた方法

であるが、独力ではなかなか思いつかない。

$S_1=\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cdots+\cos nx$　　$S_2=\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots$

$+\sin nx$　として　$S_1\sin\frac{1}{2}x$　を作ると

$$S_1 \sin\frac{1}{2}x = \cos x\sin\frac{x}{2} + \cos 2x\sin\frac{x}{2} + \cos 3x\sin\frac{x}{2} + \cdot\cdot\cdot + \cos nx\sin\frac{x}{2}$$

$$= \sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x$$ （計算は下記の例を参照、以下は自明につき説明略）

$$S_2 \sin\frac{1}{2}x = \sin x\sin\frac{x}{2} + \sin 2x\sin\frac{x}{2} + \sin 3x\sin\frac{x}{2} + \cdot\cdot\cdot + \sin nx\sin\frac{x}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos\frac{3}{2}x - \cos\frac{x}{2}) - \frac{1}{2}(\cos\frac{5}{2}x - \cos\frac{3}{2}x) - \frac{1}{2}(\cos\frac{7}{2}x - \cos\frac{5}{2}x) + \cdot\cdot\cdot$$

$$-\frac{1}{2}(\cos\frac{2n+1}{2}x - \cos\frac{2n-1}{2}x) = \frac{1}{2}(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x) = \sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x$$

（類　題）

③、④を知って ①の$(n+1)$項までを和とする三角方程式の解を求めよ。

①と③、④より $$\frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} + \cos(n+1)x = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} + \sin(n+1)x$$

これより $$\sin\frac{nx}{2}(\cos\frac{(n+1)x}{2} - \sin\frac{(n+1)x}{2}) = \sin\frac{x}{2}(\sin(n+1)x - \cos(n+1)x)$$

正弦のみの式にして

$$\sin\frac{nx}{2}\left\{\sin(\frac{(n+1)x}{2} + \frac{\pi}{2}) - \sin\frac{n+1}{2}x\right\} = \sin\frac{x}{2}\left\{\sin(n+1)x - \sin((n+1)x + \frac{\pi}{2})\right\}$$

{ } 内を和から積に変形して

$$2\sin\frac{nx}{2}\cos(\frac{(n+1)x}{2} + \frac{\pi}{4})\sin\frac{\pi}{4} = 2\sin\frac{x}{2}\cos((n+1)x + \frac{\pi}{4})\sin(-\frac{\pi}{4})$$

整理して $$\sin\frac{nx}{2}\cos(\frac{(n+1)x}{2} + \frac{\pi}{4}) = -\sin\frac{x}{2}\cos((n+1)x + \frac{\pi}{4})$$

左辺、右辺に各々 積和公式を適用し

$$\sin(\frac{(2n+1)x}{2} + \frac{\pi}{4}) + \sin(-\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{(2n+3)x}{2} + \frac{\pi}{4}) - \sin(-\frac{(2n+1)x}{2} - \frac{\pi}{4})$$

両端の項が打ち消し合うので （右辺－左辺）は

$$\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) - \sin(\frac{(2n+3)x}{2} + \frac{\pi}{4}) = 2\cos(\frac{(n+2)x}{2} + \frac{\pi}{4})\sin(-\frac{(n+1)x}{2}) = 0$$

条件より $\sin\frac{n+1}{2}x \neq 0$ から $\frac{(n+2)x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ から $x = \frac{\pi}{2(n+2)}$

以　上

注）本問は 私の数学散歩道(28) の問題(3)を一般の場合に拡張したものです。