私の数学散歩道(29)

特別な形の連立方程式について

数実研会員　村田　洋一

（作成の背景）

今回 初等数学第 83 号ｐ.114 を参考に下記連立方程式を作り、その解法にチャレンジしてみました。

$x+y+z+u=-xyzw$

$x^2+y^2+z^2+u^2=13x^2y^2z^2u^2$

$x^3+y^3+z^3+u^3=-7x^3y^3z^3u^3$

$x^4+y^4+z^4+u^4=49x^4y^4z^4u^4$

上記各方程式で　$p=\dfrac{1}{yzu},q=\dfrac{1}{zux},r=\dfrac{1}{uxy},s=\dfrac{1}{xyz}$　と変数変換すると

$p+q+r+s=\dfrac{x+y+z+u}{xyzu}=-\dfrac{xyzu}{xyzu}=-1$　・・・・・・・①

同様に　$p^2+q^2+r^2+s^2=13$　・・・・・・・・②

$p^3+q^3+r^3+s^3=-7$　・・・・・・・・③

$p^4+q^4+r^4+s^4=49$　・・・・・・・・④

p,q,r,s各々を一つの文字で表示できないから、4次方程式の解と係数の関係と①～④の対称式の関連付けを考える。

$(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)=x^4-(p+q+r+s)x^3+(pq+qr+rs+ps+pr+qs)x^2-(pqr+qrs+prs+pqs)x+pqrs$　より　①，②から

$(p+q+r+s)^2=(-1)^2=13+2(pq+qr+rs+ps+pr+qs)$

$pq+qr+rs+ps+pr+qs=-6$　・・・・・・・・⑤

また　$(p+q+r+s)^3=(p+q)^3+3(p+q)(r+s)(p+q+r+s)+(r+s)^3$　から

$-7+3pq(p+q)-3(p+q)(r+s)+3rs(r+s)=-1$

$pq(p+q)+rs(r+s)-(p+q)(r+s)=2$　①より

$pq(1+r+s)+rs(1+p+q)+pr+ps+qr+qs=-2$

$pqr+pqs+prs+qrs=-2+6=4$　⑤より　・・・・・・・⑥

$pqrs$を求めるため（$(pq+qr+rs+ps+pr+qs)^2$　を考える。

与式＝$p^2q^2+q^2r^2+r^2s^2+p^2s^2+p^2r^2+q^2s^2+$

$2p(pqr+pqs+prs+qrs)+2q(pqr+pqs+prs+qrs)+$

$2r(pqr+pqs+prs+qrs)+2s(pqr+pqs+prs+qrs)-2pqrs$

$=p^2q^2+q^2r^2+r^2s^2+p^2s^2+p^2r^2+q^2s^2+$

$2(p+q+r+s)(pqr+pqs+prs+qrs)-2pqrs=(-6)^2$　・・・・⑦（注）

一方 $(p^2+q^2+r^2+s^2)^2=(p^2+q^2)^2+2(p^2+q^2)(r^2+s^2)+(r^2+s^2)^2$

$=p^4+q^4+r^4+s^4+2(p^2q^2+q^2r^2+r^2s^2+p^2s^2+p^2r^2+q^2s^2)=13^2$・・・⑧

⑧と②、④より括弧内＝60　・・・・・⑨

⑦と①、⑤、⑥、⑨より　60−2×4－２$pqrs$=36　∴ $pqrs$=8　・・・・・⑩

従って①，⑤、⑥、⑩を解とする 4 次方程式は

$t^4+t^3-6t^2-4t+8=0$　左辺を$f(t)$ とおいて$f(1)=0, f(2)=0$

因数分解して　$(t-1)(t-2)(t+2)^2=0$　よって(p,q,r,s)=(1, −2−2, 2)

及びその置換で計12通り。

元の方程式の解は置換えの式に各々の値を代入、辺々掛けて計算すると

$xyzu$＝$\frac{1}{2}$ から　$(x,y,z,u)=(\frac{1}{2},-1,-1,1)$

これとこの置換 計 12 個が求める解である。

上記の形の 4 元 4 次連立方程式を n＝４の時とする。n＝5 の時も完成したが、長くなるため次回にまわしたい。

以　上

（注）⑦式後段の計算の補足

$$2p(pqr+pqs+prs)+2q(pqr+pqs+qrs)+2r(pqr+prs+qrs)+$$
$$2s(pqs+prs+qrs)+6pqrs$$

この式に⑥が使えるよう変形し、$-2pqrs$ としたもの。