私の数学散歩道(27)　平成 28 年 2 月 5 日提出

高階の階差を持つ数列の一般項・漸化式とその和について

数実研会員　村田　洋一

（テーマ選定の背景）

何個かの項の数列$\{a_n\}$ が与えられ その一般項a_nを求めよ、という問題をよく見ます。階差から数列の規則性を見つけ計算しますが、a_nの証明を要求していないため それだけでは一般項が正しいかどうかが気になりました。

注１）のようなケース、あるいはその他の例があるかも知れないからです。

そこでS_nの成立を数学的帰納法で証明し $S_n - S_{n-1} = a_n (n \geq 2,$かつ$a_1 = S_1 \quad n = 1)$ からa_nの正しさを確認、併せて漸化式を計算しました。　類似の問題は探した範囲では見当りませんでしたが、漸化式や和を持つ数列のa_n は推定でも正しいためでしょう。

数列は等比数列と雑数列を組み合わせ 試行錯誤で作成、問題も適宜纏めたものです。

（問　題）

1　-3　-15　-39　-77　-127　-179　-207　-153　105・・・

（１）上の数列から一般項 a_nを推定せよ。

（２）S_nを求めよ。また数学的帰納法により S_n が成り立つことを示せ。

（３）$S_n - S_{n-1}$ を計算しa_n を求め、これが（１）の結果と一致することを示せ。

（４）a_nを満たす隣接５項間の漸化式を求めよ。

（５）S_n を最小にするnと最小値を求めよ。また$S_n > 1{,}000{,}000$ となる nの最小値とそのときの和を求めよ。但し、電卓の使用は可とする。

（解　答）

（1）上の数列から一般項 a_nを推定せよ。

順に階差数列を作り各々の一般項を b_n, c_n, d_n, e_n とする。

1　-3　-15　-39　-77　-127　-179　-207　-153　105・・

b_n　-4　-12　-24　-38　-50　-52　-28　54　258・・

c_n　-8　-12　-14　-12　-2　24　82　204・・

d_n　-4　-2　2　10　26　58　122・・

e_n　2　4　8　16　32　64・・

明らかに　$e_n = 2^n$　（$n = 1,2,3\cdot\ \cdot$）　以下、(　)の記載を略す。

$$d_n = -4 + \sum_{n=1}^{n-1} 2^n = -4 + 2(2^{n-1} - 1) = 2^n - 6$$

$$c_n = -8 + \sum_{n=1}^{n-1}(2^n - 6) = -8 - 6(n-1) + 2^n - 2 = -6n - 4 + 2^n$$

$$b_n = -4 + \sum_{n=1}^{n-1}(-6n - 4 + 2^n) = -4 - 6\cdot\frac{n(n-1)}{2}$$

$$- 4(n-1) + 2^n - 2 = -3n^2 - n - 2 + 2^n$$

$$a_n = 1 + \sum_{n=1}^{n-1}(-3n^2 - n - 2 + 2^n) = 1 - \frac{1}{2}(n-1)(2n^2 + 4)$$

$$+ 2^n - 2 = (n-1)^2 - n^3 + 2^n$$

よって　$a_n = (n-1)^2 - n^3 + 2^n$　（$n = 1,2,3\cdot\ \cdot$）

（2）S_n を求めよ。また数学的帰納法により S_n が成り立つことを示せ。

$$S_n = \sum_{n=1}^{n}\left\{(n-1)^2 - n^3 + 2^n\right\} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$- n(n+1) + n + 2(2^n - 1) = \frac{1}{12}n(n+1)\left\{2(2n+1) - 3n(n+1) - 12\right\} + n + 2^{n+1} - 2$$

$$= n - \frac{1}{12}n(n+1)(3n^2 - n + 10) + 2^{n+1} - 2$$

S_n はまだ簡単にできるが（5）の計算の都合上このままにしておく。(cf. ①)

（数学的帰納法による証明）

上記の S_n で $n = 1$ のとき　$S_1 = 1 - \frac{1}{12}\cdot 2\cdot 12 + 2^2 - 2 = 1$　$a_1 = 1$ で成立する。

$n = k$ のとき成立すると仮定して

$$S_k = k - \frac{1}{12}k(k+1)(3k^2 - k + 10) + 2^{k+1} - 2$$

$n = k + 1$　のとき成り立つことを示せばよい。S_k を展開・整理して

$$S_k = k - \frac{1}{12}(3k^4 + 2k^3 + 9k^2 + 10k) + 2^{k+1} - 2$$

$$= -\frac{1}{4}k^4 - \frac{1}{6}k^3 - \frac{3}{4}k^2 + \frac{1}{6}k - 2 + 2^{k+1} \qquad \cdot\ \cdot\ \cdot ①$$

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = -\frac{1}{4}k^4 - \frac{1}{6}k^3 - \frac{3}{4}k^2 + \frac{1}{6}k - 2 + 2^{k+1} + k^2 - (k+1)^3 + 2^{k+1}$$

$$= -\frac{1}{4}k^4 - \frac{7}{6}k^3 - \frac{11}{4}k^2 - \frac{17}{6}k - 3 + 2^{k+2}$$

$$= -\frac{1}{12}(3k^4 + 14k^3 + 33k^2 + 34k + 36) + 2^{(k+1)+1} \qquad \cdot\cdot\cdot ②$$

②式の第１項を $(k+1)$ の式で書き直すことができればよい。

右辺（　　）内 $= 3(k+1)^4 + a(k+1)^3 + b(k+1)^2 + c(k+1) + d$ 　と置いて

$= 3(k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) + a(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + b(k^2 + 2k + 1) + c(k+1) + d$

$= 3k^4 + (12+a)k^3 + (18 + 3a + b)k^2 + (12 + 3a + 2b + c)k + 3 + a + b + c + d$

未定係数法で係数比較すると

$12 + a = 14$ 　　　$3a + b = 15$

$3a + 2b + c = 22$ 　　　$a + b + c + d = 33$

この連立方程式を解いて　$a = 2$ 　$b = 9$ 　$c = -2$ 　$d = 24$

従って　$S_{k+1} = -\frac{1}{4}(k+1)^4 - \frac{1}{6}(k+1)^3 - \frac{3}{4}(k+1)^2 + \frac{1}{6}(k+1) - 2 + 2^{(k+1)+1} \qquad \cdot\cdot\cdot ③$

以上の議論より ③は　$n = k+1$ のときも成立することを示している。

このことから数学的帰納法により S_n が成り立つ。

（３） $S_n - S_{n-1}$ を計算し a_n を求め、これが（１）の結果と一致することを示せ。

$n = 1$ のとき　（２）の後半より　$a_1 = S_1 = 1$

$a_n = S_n - S_{n-1}$ 　$(n \geq 2$ のとき$)$

$$= n - \frac{1}{12}n(n+1)(3n^2 - n + 10) + 2^{n+1} - 2 - (n-1) + \frac{1}{12}n(n-1)(3n^2 - 7n + 14) - 2^n + 2$$

$$= 2^{n+1} - 2^n + 1 + \frac{1}{12}n\{(n-1)(3n^2 - 7n + 14) - (n+1)(3n^2 - n + 10)\}$$

$= 2^n + 1 - n^3 + n^2 - 2n = (n-1)^2 - n^3 + 2^n$ 　これは $n = 1$ のときも成立で

（１）の結果に一致する。

（４） a_n を満たす隣接５項間の漸化式を求めよ。

以下、階差を調べ 逐次 n を消去する方針でいく。$(n = 1,2,3\cdot\cdot)$

$a_n = (n-1)^2 - n^3 + 2^n \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot ①$

$a_{n+1} = n^2 - (n+1)^3 + 2^{n+1} \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot ②$

$a_{n+2} = (n+1)^2 - (n+2)^3 + 2^{n+2} \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot ③$

$a_{n+3} = (n+2)^2 - (n+3)^3 + 2^{n+3} \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot ④$

②－①　$a_{n+1} - a_n = -3n^2 - n - 2 + 2^n \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot ⑤$

③―②　$a_{n+2} - a_{n+1} = -3n^2 - 7n - 6 + 2^{n+1} \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot ⑥$

④―③　$a_{n+3} - a_{n+2} = -3n^2 - 13n - 16 + 2^{n+2} \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot ⑦$

⑤—⑥　$-a_{n+2}+2a_{n+1}-a_n=6n+4-2^n$　・・・・⑧

⑥ - ⑦　$-a_{n+3}+2a_{n+2}-a_{n+1}=6n+10-2^{n+1}$　・・・・⑨

⑧－⑨　で隣接 4 項の関係式を導く。

$a_{n+3}-3a_{n+2}+3a_{n+1}-a_n=-6+2^n$　・・・・⑩

n を $(n+1)$ に置き換えて

$a_{n+4}-3a_{n+3}+3a_{n+2}-a_{n+1}=-6+2^{n+1}$　・・・・⑪

⑪－2×⑩

$a_{n+4}-5a_{n+3}+9a_{n+2}-7a_{n+1}+2a_n=6$　・・・・⑫

⑫が求める漸化式で 例えば $a_1=1$　$a_2=-3$　$a_3=-15$　$a_4=-39$ のとき $a_5=-77$

（5） S_n を最小にする n と最小値を求めよ。また $S_n>1{,}000{,}000$ となる n の最小値とそのときの値を求めよ。但し、電卓の使用は可とする。

$a_1=S_1=1>0$　a_2〜$a_9<0$ より S_2〜S_9 で減少、$a_{10}>0$ より $S_{10}=-694$ で以後増加

従って $n=9$ のとき　$S_9=9-\dfrac{9\cdot 10\cdot 244}{12}+2^{10}-2=9-1{,}830+1{,}024-2=-799$

が求める最小値である。

また　$n\geq 10$ のとき　$2^n>n^3-(n-1)^2$

$2^{20}=(2^{10})^2=1{,}024^2=1{,}048{,}576$ より

$$S_{19}=19-\frac{19\cdot 20\cdot 1{,}074}{12}+2^{20}-2=19-34{,}010+1{,}048{,}576-2=1{,}014{,}548>1{,}000{,}000$$

$n=19$ が題意に適し　$S_{19}=1{,}014{,}548$ が 1,000,000 に最も近い求める値である。

以　上

注 1）数式 n^2+n+41 を数列の一般項としてではなく、オイラーの素数生成式と見ると $1\leq n\leq 60$ では $n=40,41,44,49,56$ で合成数を与え、その他の n を代入するとすべて素数になります。 従って 最初の 39 項までは両方の一般項が一致し区別がつきません。

もっとも後者は漸化式や和を持たず、前者のそれは $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=2$ で和を持ちます。前者や掲題の例は等差・等比数列や雑数列からなる特殊な数列、また後者は高校数学の範囲外の一般の数列ということでしょうか？

n^2+n+41 ：$n=1$〜10 の 10 項は　43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131,151, ・・

n　1　2　3　4　5　6　7　8　9　10　・・

前者の和　$S_n=\sum_{n=1}^{n}(n^2+n+41)=\dfrac{1}{3}n(n^2+3n+125)$