私の数学散歩道(26)　平成 27 年 12 月 6 日

三角・対数・指数等の各種方程式について

数実研会員　村田　洋一

今回 下記の 4 題の方程式を考えます。

（1） $\tan\alpha + \cos(\alpha + 10°) + \sin(\alpha + 20°) = -\sqrt{3}$ （0°＜ α＜360°）を解け。

（2）次の方程式を解くことによって、解は $x = 2$ のみであることを示せ。

$$\log_x(x^2 + 4) + \log_{x^2}(3x^2 + 4) - 3\log_{x^3}(2x^2 - 4) = 3$$

（3）次の連立方程式を解け。

$$2^{3x+1} - 5\cdot 4^x 3^y - 2^{x+2}3^{2y} + 3^{3y+1} = 0 \quad \cdots ①$$

$$x^2 + y^2 - 2xy - 3x + 3y = 0 \quad \cdots ②$$

（4）次の連立方程式を解け。

$$x + \frac{1}{x} = y^2 + \frac{1}{y^2} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

$$\log_x\left(x^2 - \frac{3}{2}xy\right) + \log_y\left(y^3 + \frac{3}{2}xy^2\right) = 6 \quad \cdots ②$$

（1）は 2015 防衛医大の問題「$\sin 140° + \cos 130° + \tan 120°$ の値を求めよ。」を $120° = \alpha$　$0° < \alpha < 360°$ として他にも解がないかを含めて方程式の問題に転化したものです。これを方程式にするとあまり見たことのない式変形が現われ、興味を覚える解答になりました。因みに本問は

$\sin(180° - 40°) + \cos(90° + 40°) + \tan(180° - 60°) = \sin 40° - \sin 40° - \tan 60°$

$= -\sqrt{3}$　と容易に解けます。

（2）～（4）は 自作問題で,とくに（4）で $x = \dfrac{1}{y^2}$ のときに現れた 11 次の高次方程式が正の実数解を持たないことを示すのに苦労しました。

微分法では高次導関数が出てきて纏めにくく掲載の通りとしました。

良い解答が見つかればご教示ください。

（1） $\tan\alpha + \cos(\alpha + 10°) + \sin(\alpha + 20°) = -\sqrt{3}\,(0° < \alpha < 360°)$ を解け。

方程式の左辺＝ $\tan\alpha + \sin\{90° - (\alpha + 10°)\} + \sin(\alpha + 20°)$

$$= \tan\alpha + 2\sin\frac{90° - (\alpha + 10°) + \alpha + 20°}{2}\cos\frac{90° - (\alpha + 10°) - (\alpha + 20°)}{2}$$

$= \tan\alpha + 2\sin 50°\cos(30° - \alpha) = -\sqrt{3}$　より

$\tan\alpha + \sin 50°(\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha) = -\sqrt{3}$　・・・①

$\tan\dfrac{\alpha}{2} = m$　と置くと　$\cos\alpha = \dfrac{1-m^2}{1+m^2}$,　$\sin\alpha = \dfrac{2m}{1+m^2}$　これらを①に代入して

$$\frac{2m}{1-m^2} + \sin 50°\left\{\frac{\sqrt{3}(1-m^2)+2m}{1+m^2}\right\} = -\sqrt{3}$$

$$\sin 50°\left\{\sqrt{3}(1-m^2)^2 + 2m(1-m^2)\right\} = -\sqrt{3}(1-m^4) - 2m(1+m^2)$$

$$(1-m^2)\left\{\sqrt{3}(1-m^2)+2m\right\}\sin 50° = \sqrt{3}(m^4-1) - 2m(m^2+1) \quad ・・・②$$

式②において sin50°　$(=x)$ は無理数（具体的には 3 次方程式 $8x^3-6x+1=0$　の一つの実数解で代数的数)であるから　$a+b\sqrt{2}=0$ 等 が成り立つのは $a=b=0$　のとき から判断して 両辺に共通因数を持たなければならない。

②の左辺、右辺を因数分解して

$$(m+1)(m-1)(\sqrt{3}m+1)(m-\sqrt{3})\sin 50° = (m-\sqrt{3})(\sqrt{3}m+1)(m^2+1)$$

$$(m-\sqrt{3})(\sqrt{3}m+1)\left\{(m^2-1)\sin 50° - (m^2+1)\right\} = 0$$

置換えから明らかに　$m \neq \pm 1$　より

$m=\sqrt{3}$　$m=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　また　$m^2 = -\dfrac{1+\sin 50}{1-\sin 50°} < 0$　でこの m　は不適。

$0° < \dfrac{\alpha}{2} < 180°$　より　$m=\sqrt{3}$　のとき　$\tan\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{3}$　　$\dfrac{\alpha}{2} = 60°$

$m = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　のとき　$\tan\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　$\dfrac{\alpha}{2} = 150°$　従って　$\alpha = 120°, 300°$

(別　解)

①の両辺に $\cos\alpha$　を掛けて

$$\sin\alpha + \sin 50°\cos\alpha(\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha) = -\sqrt{3}\cos\alpha$$

$$\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha + \sin 50°\cos\alpha(\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$$

$$(\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha)(1+\sin 50°\cos\alpha) = 0$$

これより　$\tan\alpha = -\sqrt{3}$　よって　$\alpha = 120°, 300°$

また　$\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sin 50} < -\dfrac{1}{\sin 60°} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}} = -1.15 < -1$ で不適。

（2）　次の方程式を解くことによって、解は　$x=2$ のみであることを示せ。

$$\log_x(x^2+4) + \log_{x^2}(3x^2+4) - 3\log_{x^3}(2x^2-4) = 3$$

対数の定義より $x, x^2, x^3 > 0$　かつ$\neq 1$　$2x^2-4>0$ より　$x > \sqrt{2}$ ・・・①

常用対数で左辺を変形して

$$\frac{\log(x^2+4)}{\log x} + \frac{\log(3x^2+4)}{2\log x} - \frac{3\log(2x^2-4)}{3\log x} = 3$$

両辺に $2\log x$ を掛けて

$$\log(x^2+4)^2+\log(3x^2+4)-\log(2x^2-4)^2=\log x^6$$

$$(x^4+8x^2+16)(3x^2+4)=x^6(4x^4-16x^2+16)$$

高幂の順に整理して

$$4x^{10}-16x^8+13x^6-28x^4-80x^2-64=0$$

$x^2=t$ とおくと ①より $t>2$

$f(t)=4t^5-16t^4+13t^3-28t^2-80t-64$ で 条件から $t=4$ として

$f(4)=4096-4096+832-448-320-64=0$ より 組立除法から

$$(t-4)(4t^4+13t^2+24t+16)=0$$

第２項 $4t^4+13t^2+24t+16$ は $t(>2)>0$ より常に正で 解を持たない。

従って 求める解は $x=2$ のみである。

（３） 次の連立方程式を解け。

$$2^{3x+1}-5\cdot4^x3^y-2^{x+2}3^{2y}+3^{3y+1}=0 \quad \cdots ①$$

$$x^2+y^2-2xy-3x+3y=0 \quad \cdots ②$$

①より $2\cdot2^{3x}-5\cdot2^{2x}3^y-4\cdot2^x3^{2y}+3\cdot3^{3y}=0$

ここで $2^x=a>0$、$3^y=b>0$ とおくと

$2a^3-5a^2b-4ab^2+3b^3=0$

$f(a,b)=2a^3-5a^2b-4ab^2+3b^3$ とすると $f(-b,b)=-7b^3+7b^3=0$ より

$(a+b)$ を因数に持つ。組立除法から ①は

$(a+b)(2a^2-7ab+3b^2)=(a+b)(2a-b)(a-3b)=0$

$a+b=2^x+3^y>0$ より この式を満たす (x,y) は存在しない。

従って①式からは $2a=b$ から $2^{x+1}=3^y$ ・・・③

同様に $a=3b$ から $2^x=3^{y+1}$ ・・・④

また ②より $x^2-(2y+3)x+y(y+3)=0$

因数分解して $(x-y)(x-y-3)=0$ これから $x=y$、$x=y+3$

$x=y$ のとき ③より $2^{x+1}=3^x$ 2を底とする両辺の対数をとって

$x+1=x\log_2 3$ $x(\log_2 3-1)=1$ よって $x=y=\dfrac{1}{\log_2 3-1}$ ・・・⑤

同様に $x=y$ のとき ④より $2^x=3^{x+1}$ $x=(x+1)\log_2 3$

$x(\log_2 3-1)=-\log_2 3$ これから $x=y=-\dfrac{\log_2 3}{\log_2 3-1}$ ・・・⑥

$x=y+3$ のとき ④より $2^{y+3}=3^{y+1}$ $y+3=(y+1)\log_2 3$

$y=\dfrac{3-\log_2 3}{\log_2 3-1}$ から $x=\dfrac{2\log_2 3}{\log_2 3-1}$ $(x,y)=\left(\dfrac{2\log_2 3}{\log_2 3-1},\dfrac{3-\log_2 3}{\log_2 3-1}\right)$ ・・・⑦

同様に $x=y+3$ のとき ③より $2^{y+4}=3^y$ $y+4=y\log_2 3$

$y=\dfrac{4}{\log_2 3-1}$ から $x=\dfrac{1+3\log_2 3}{\log_2 3-1}$ $(x,y)=(\dfrac{3\log_2 3+1}{\log_2 3-1},\dfrac{4}{\log_2 3-1})$ ・・・⑧

これから ⑤，⑥，⑦，⑧を纏めた下記４組が求める解となる。

$$(x,y)=(\frac{1}{\log_2 3-1},\frac{1}{\log_2 3-1}),(-\frac{\log_2 3}{\log_2 3-1},-\frac{\log_2 3}{\log_2 3-1})$$

$$(\frac{2\log_2 3}{\log_2 3-1},\frac{3-\log_2 3}{\log_2 3-1}),(\frac{3\log_2 3+1}{\log_2 3-1},\frac{4}{\log_2 3-1})$$

（４） 次の連立方程式を解け。

$$x+\frac{1}{x}=y^2+\frac{1}{y^2} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

$$\log_x(x^2-\frac{3}{2}xy)+\log_y(y^3+\frac{3}{2}xy^2)=6 \quad \cdots ②$$

①より $x-y^2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y^2}=x-y^2-\dfrac{x-y^2}{xy^2}=(x-y^2)(1-\dfrac{1}{xy^2})=0$

これから $x=y^2$ ・・・③ $xy^2=1$ ・・・④

②より $\log_x x(x-\dfrac{3}{2}y)+\log_y y^2(y+\dfrac{3}{2}x)=6$

ここで $x,y>0,\neq 1$ $x(x-\dfrac{3}{2}y)>0$ $y^2(y+\dfrac{3}{2}x)>0$ ・・・⑤

$\log_x x(x-\dfrac{3}{2}y)=1+\log_x(x-\dfrac{3}{2}y)$ などから $\log_x(x-\dfrac{3}{2}y)+\log_y(y+\dfrac{3}{2}x)=3$ ・・⑥

③で $x=y^2$ のとき ⑥より $\log_{y^2}(y^2-\dfrac{3}{2}y)+\log_y(\dfrac{3}{2}y^2+y)=3$ 常用対数に変換

$\dfrac{\log(y^2-\frac{3}{2}y)}{2\log y}+\dfrac{\log(\frac{3}{2}y^2+y)}{\log y}=3$ 両辺に $2\log y$ を掛けて

$\log(y^2-\dfrac{3}{2}y)+\log(\dfrac{3}{2}y^2+y)^2=6\log y$ 対数記号をはずして

$(y^2-\dfrac{3}{2}y)(\dfrac{3}{2}y^2+y)^2=y^6$ 展開・整理すると $y^3(10y^3-3y^2-28y-12)=0$

$y\neq 0$ から $10y^3-3y^2-28y-12=0$ 左辺を $f(y)$ とおくと $f(2)=0$

よって $y>0$，$y\neq 1$ より $y=2$ ③より $x=4$ この解は 条件⑤を満たす。

組立除法より $10y^2+17y+6=0$ $y>0$，$y\neq 1$ からこの解は不適となる。

④で$xy^2=1$ のとき $x=\dfrac{1}{y^2}$ を ⑥に代入 $\log_{\frac{1}{y^2}}(\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{3}{2}y)+\log_y(\dfrac{3}{2y^2}+y)=3$

底を常用対数に変換して $\log\dfrac{1}{y^2}=-\log y^2=-2\log y$ などから

$$\frac{\log\dfrac{2-3y^3}{2y^2}}{-2\log y}+\frac{\log\dfrac{3+2y^3}{2y^2}}{\log y}=3$$ 分母を払って 展開すると

$\log(2-3y^3)-\log 2y^2-\log(3+2y^3)^2+\log 4y^4=\log y^{-6}$

$\log 4y^4-\log 2y^2=2\log 2y^2-\log 2y^2=\log 2y^2$ より

$\log\dfrac{2-3y^3}{9+12y^3+4y^6}+\log 2y^2=\log\dfrac{1}{y^6}$ 対数記号をはずして $\dfrac{2y^2(2-3y^3)}{4y^6+12y^3+9}=\dfrac{1}{y^6}$

$2y^8(2-3y^3)=4y^6+12y^3+9$ これを展開・整理して左辺を $f(y)$ とおくと

$f(y)=6y^{11}-4y^8+4y^6+12y^3+9=0$

この方程式が $0<y<1$、$y>1$ で正の実数解を持つかどうかを調べる。

$y>1$ のとき y^8 の係数のみが負であることに着目し

$4y^{11}>4y^8$ 分解した残りの $2y^{11}+4y^6+12y^3+9>0$

これらを辺々加えて $6y^{11}+4y^6+12y^3+9>4y^8$ よって $f(y)>0$

$0<y<1$ のとき

$f(y)=2y^6(3y^5-2y^2+2)+12y^3+9$ と変形して（ ）内の$-2y^2+2$ に注目すると $0<1-y^2<1$ より $0<2(1-y^2)<2$ その他の項はすべて正であるから $f(y)>0$

従って $0<y<1$ $y>1$ の範囲では $f(y)=0$は正の実数解を持たない。

以上のことから解は (x,y) =(4, 2) のみとなる。

以　上

(参照資料)　問題（１）関連

数研出版　2015 入試問題集 数学ⅠⅡAB　理系　問題 141 (1)

sin 140°+ cos 130°+ tan 120°の値を求めよ。　～2015 防衛医大～