私の数学散歩道(25)　平成 27 年 10 月 7 日提出

1997 センター入試(追試験)数学Ⅱ・数学Ｂ　第１問［1］の別解検討

数実研会員　村田　洋一

センター試験の過去問を遡って見ていたら下記の問題が気になりました。
面白そうで、いくつか別解が見つかる可能性があり 挑戦してみたところ、問題の指示に沿った解を含めて下記 4 つの解を得ました。

また通常 答としての最大値、最小値のほか そのときの座標を示すことが多いですが、本問ではその設問がないため追加し その理由を考えてみました。

結論は 問題の誘導から考えて計算が煩雑で、時間不足に陥るためと推定しました。
その他の解答があればご教示下さい。

（問　題）実数 x, y が $11x^2+12xy+6y^2=4$ を満たすとき、x^2+y^2 の最小値と最小値を次のように求めよう。　また最大値をとるときの $Q(x,y)$ 、最小値をとるときの $R(x,y)$ も計算しよう。(＊)

xy 平面上の原点 O と他の点 $P(x,y)$ を結ぶ線分 OP の長さを r, x 軸と動径 OP のなす角を θ 　とすると

$$\frac{1}{r^2}(11x^2+12xy+6y^2)=(\text{ア})\cos^2\theta+(\text{イウ})\sin\theta\cos\theta+(\text{エ})$$

$$=\frac{(\text{オ})}{(\text{カ})}\cos 2\theta+(\text{キ})\sin 2\theta+\frac{(\text{クケ})}{(\text{コ})}=\frac{(\text{サシ})}{(\text{ス})}\sin(2\theta+\alpha)+\frac{(\text{クケ})}{(\text{コ})}$$

である。ただし $\sin\alpha=\dfrac{(\text{セ})}{(\text{ソタ})}$, $\cos\alpha=\dfrac{(\text{チツ})}{(\text{テト})}$ である。

従って、x^2+y^2 の最大値は(ナ), 最小値は $\dfrac{(\text{ニ})}{(\text{ヌネ})}$ である。

(＊)：アンダーライン部、当方で追記

解答　(1)は題意に沿った解

(1)　$x=r\cos\theta$,　$y=r\sin\theta$ とおくと

$$\frac{1}{r^2}(11x^2+12xy+6y^2)=5\cos^2\theta+12\sin\theta\cos\theta+6=\frac{5}{2}\cos 2\theta+6\sin 2\theta+\frac{17}{2}$$

ここで $k\sin(2\theta+\alpha)=k(\sin 2\theta\cos\alpha+\cos 2\theta\sin\alpha)$ より係数比較して

$k\cos\alpha=6$　$k\sin\alpha=\dfrac{5}{2}$ より　$\tan\alpha=\dfrac{5}{12}$　従って　$\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$　$\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$

$k=\dfrac{13}{2}$　　　これから　　$=\dfrac{13}{2}\sin(2\theta+\alpha)+\dfrac{17}{2}=\dfrac{4}{r^2}$

$r^2=x^2+y^2$　であり　　$\sin(2\theta+\alpha)=1$　のとき　$\dfrac{4}{r^2}=15$　　$r^2=\dfrac{4}{15}$

$\sin(2\theta+\alpha)=-1$　のとき　$\dfrac{4}{r^2}=2$　　$r^2=2$

従って、x^2+y^2 の最大値は 2，最小値は $\dfrac{4}{15}$　である。

次に最大値をとるときの $Q(x,y)$ を求める。　　$x=\sqrt{2}\cos\theta$　$y=\sqrt{2}\sin\theta$

$r^2=2$ より　$\dfrac{13}{2}\sin(2\theta+\alpha)+\dfrac{17}{2}=2$　$\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$　$\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$ を代入して

$5\cos 2\theta+12\sin 2\theta=-13$ ・・①　$12\sin 2\theta$ を右辺に移項、平方して

$25(1-\sin^2 2\theta)=169+312\sin 2\theta+144\sin^2 2\theta$　　$(13\sin 2\theta+12)^2=0$

$\sin 2\theta=-\dfrac{12}{13}$　これを①に代入　$\cos 2\theta=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{144-169}{13}=-\dfrac{5}{13}$

倍角の公式から $\cos^2\theta=\dfrac{4}{13}$　従って　$\sin^2\theta=\dfrac{9}{13}$ $\rightarrow\cos\theta=\pm\dfrac{2}{\sqrt{13}}$　$\sin\theta=\pm\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

$x=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$，$y=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$　として問題の条件式に代入し解を吟味すると x,y が異符号の

ときのみ適する。従って $(x,y)=(\pm\dfrac{4}{\sqrt{26}},\mp\dfrac{6}{\sqrt{26}})$ (複号同順) のとき最大値 2 をとる。

最小値をとるときの $R(x,y)$ は同様に　$5\cos 2\theta+12\sin 2\theta=13$ ・・②

$(13\sin 2\theta-12)^2=0$　$\sin 2\theta=\dfrac{12}{13}$　これから $\cos 2\theta=\dfrac{5}{13}$　$\cos^2\theta=\dfrac{9}{13}$； $\sin^2\theta=\dfrac{4}{13}$

$\rightarrow\cos\theta=\pm\dfrac{3}{\sqrt{13}}$　$\sin\theta=\pm\dfrac{2}{\sqrt{13}}$　　$x=\pm\dfrac{6}{\sqrt{195}}$，　$y=\pm\dfrac{4}{\sqrt{195}}$ として条件式に代入し

解を吟味すると x,y が同符号のときのみ適する。

これから　$(x,y)=(\pm\dfrac{6}{\sqrt{195}},\pm\dfrac{4}{\sqrt{195}})$（複号同順）のとき最小値 $\dfrac{4}{15}$ をとる。

また最大値をとる (x,y) は $x^2+y^2=2$，$11x^2+12xy+6y^2=4$ を解いてもよい。

最小値についても同様。

（注）三角方程式①、②は $\tan\theta$ についての二次方程式に帰着できる。

(2)　点 (x,y) を原点の周りに θ だけ回転した点を (X,Y) とすると

$X=x\cos\theta-y\sin\theta$　$Y=x\sin\theta+y\cos\theta$　　代入し整理すると

$11X^2+12XY+6Y^2-4=x^2(11\cos^2\theta+12\sin\theta\cos\theta+6\sin^2\theta)+2xy(6\cos^2\theta$

$$-5\sin\theta\cos\theta-6\sin^2\theta)+y^2(11\sin^2\theta-12\sin\theta\cos\theta+6\cos^2\theta)-4=0$$

各係数を倍角にして

$$x^2(\frac{5}{2}\cos 2\theta+6\sin 2\theta+\frac{17}{2})+xy(12\cos 2\theta-5\sin 2\theta)$$

$$+y^2(-\frac{5}{2}\cos 2\theta-6\sin 2\theta+\frac{17}{2})-4=0$$

xy の係数を 0 とおいて　$12\cos 2\theta-5\sin 2\theta=0$　　$\tan 2\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\dfrac{12}{5}>0$ より

$0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}$　　$\pi<2\theta<\dfrac{3\pi}{2}$　であるから　$\sin 2\theta, \cos 2\theta$　は同符号になる。

$12\cos 2\theta-5\sin 2\theta=0$　　$144(1-\sin^2 2\theta)=25\sin^2 2\theta$　　$\sin 2\theta=\pm\dfrac{12}{13}$

従って　$\cos 2\theta=\pm\dfrac{5}{13}$（複号同順）　各係数は複号（＋）で　$15X^2+2Y^2=4$

(—)で　$2X^2+15Y^2=4$　　これから　$\dfrac{X^2}{(\frac{2}{\sqrt{15}})^2}+\dfrac{Y^2}{(\sqrt{2})^2}=1$　$\dfrac{X^2}{(\sqrt{2})^2}+\dfrac{Y^2}{(\frac{2}{\sqrt{15}})^2}=1$

でそれぞれ　長径 $\sqrt{2}$ 、短径 $\dfrac{2}{\sqrt{15}}$ の楕円となる。

一方　$X^2+Y^2=x^2+y^2=r^2$　であるから　半径 r の円と上記楕円の接点から

$r^2=2$ のとき最大値をとり、$r^2=\dfrac{4}{15}$ のとき最小値をとる。

最大値をとるときの $P(x,y)$　は　$x^2+y^2=2$，$11x^2+12xy+6y^2=4$ から

定数項を消去して　　$9x^2+12xy+4y^2=(3x+2y)^2=0$　　$y=-\dfrac{3}{2}x$

最初の式に代入して　$x=\pm\dfrac{4}{\sqrt{26}}$　解を吟味して $y=\mp\dfrac{6}{\sqrt{26}}$　$r^2=\dfrac{4}{15}$ の時も同様に

$4x^2-12xy+9y^2=(2x-3y)^2=0$　$y=\dfrac{2}{3}x$　より $x=\pm\dfrac{6}{\sqrt{195}}, y=\pm\dfrac{4}{\sqrt{195}}$（各々複号同順）

(3)　$x=r\cos\theta$，　$y=r\sin\theta$　（$r^2=x^2+y^2$）　とおき条件式に代入すると

$11r^2\cos^2\theta+12r^2\sin\theta\cos\theta+6r^2\sin^2\theta-4=0$　整理して 極方程式に変換する。

$\dfrac{5}{2}r^2(1+\cos 2\theta)+6r^2\sin 2\theta+6r^2-4=0$　　$r^2(5\cos 2\theta+12\sin 2\theta+17)=8$

合成して　$r^2\{13\sin(2\theta+\alpha)+17\}=8$　但し　$\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$　$\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$

$r^2 = \dfrac{8}{13\sin(2\theta+\alpha)+17}$ 分母の最大は $2\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ より $r^2=\dfrac{8}{13+17}=\dfrac{4}{15}$ が最小値

分母の最小は $2\theta+\alpha=\dfrac{3\pi}{2}$ より $r^2=\dfrac{8}{17-13}=2$ が最小値

$r^2=2$ のとき (1)の解法に準じて $x=\pm\dfrac{4}{\sqrt{26}}$， $y=\mp\dfrac{6}{\sqrt{26}}$

$r^2=\dfrac{4}{15}$ のとき $x=\pm\dfrac{6}{\sqrt{195}}, y=\pm\dfrac{4}{\sqrt{195}}$ （各々複号同順）

(4) $x^2+y^2=r^2$ より $y^2=r^2-x^2\geq 0$、$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$

$$11x^2+12xy+6y^2-4=11x^2\pm 12x\sqrt{r^2-x^2}+6(r^2-x^2)-4=0$$

$5x^2+6r^2-4=\mp 12x\sqrt{r^2-x^2}$ 平方して整理すると

$169x^4-4(21r^2+10)x^2+(6r^2-4)^2=0$ ・・③

③で $x^2=t>0$ とし t の2解を α,β とする。2個の正の解を持つから

$\alpha+\beta=\dfrac{4(21r^2+10)}{169}>0$ $\alpha\beta=\dfrac{(6r^2-4)^2}{169}>0$ 軸：$\dfrac{2(21r^2+10)}{169}>0$ ・・・④

④は常に成立する。

③の複二次式の左辺を平方完成して

$$169\left\{x^2-\frac{2(21r^2+10)}{169}\right\}^2+\frac{169(6r^2-4)^2-4(21r^2+10)^2}{169}=0 \quad \cdots\cdots⑤$$

⑤の第2項＝$\dfrac{\{13(6r^2-4)+2(21r^2+10\}\{13(6r^2-4)-2(21r^2+10\}}{169}$

$$=\frac{(120r^2-32)(36r^2-72)}{169}=\frac{288(r^2-2)(15r^2-4)}{169}$$

③式が実数解を持つためには⑤の第1項≥ 0より第2項≤ 0 従って $\dfrac{4}{15}\leq r^2\leq 2$

$r^2=2$ のとき ⑤より

$(x^2-\dfrac{2\cdot 52}{169})^2=(x^2-\dfrac{8}{13})^2\geq 0$ より $x=\pm\dfrac{4}{\sqrt{26}}$ 解を吟味して $y=\mp\dfrac{6}{\sqrt{26}}$

$r^2=\dfrac{4}{15}$ のときも同様にして $x=\pm\dfrac{6}{\sqrt{195}}$， $y=\pm\dfrac{4}{\sqrt{195}}$ (各々複号同順)

以 上

閑　話　休　題

（問）　数　a, b, c　があり、

$a+b+c=7$ ・・・①　　$\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=\dfrac{7}{10}$ ・・・②　となっています。

次の式　$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$　の値を求めなさい。

出典：岩波現代文庫　「やわらかな思考を育てる数学問題集」３

ドミトリ・フォミーンほか２名　志賀浩二・田中紀子［訳］　問 133

１．オーソドックスな解（小生の解答）

方程式は①，②の２本、未知数は３個で一般的には解けないから　$ab+bc+ca$　と abc の関係に注目する。

①と②より　$\dfrac{1}{7-a}+\dfrac{1}{7-b}+\dfrac{1}{7-c}=\dfrac{(7-b)(7-c)+(7-c)(7-a)+(7-a)(7-b)}{(7-a)(7-b)(7-c)}$

分母＝$7^3-(a+b+c)\cdot 7^2+(a+b+c)\cdot 7-abc=7(ab+bc+ca)-abc$

分子＝$49\times 3-7\cdot 2(a+b+c)+ab+bc+ca=49+ab+bc+ca$

よって　$\dfrac{ab+bc+ca+49}{7(ab+bc+ca)-abc}=\dfrac{7}{10}$　から　$39(ab+bc+ca)=7abc+490$

$ab+bc+ca=t$　と　置いて　$t=\dfrac{7(abc+70)}{39}$　・・・・・③

一方　$u=\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$　として　　分母＝$7t-abc$

分子＝$a(7-b)(7-c)+b(7-c)(7-a)+c(7-a)(7-b)$

＝$a(49-7b-7c+bc)+b(49-7c-7a+ca)+c(49-7a-7b+ab)$

＝$49(a+b+c)-14(ab+bc+ca)+3abc=343-14t+3abc$

従って　$u=\dfrac{343-14t+3abc}{7t-abc}=\dfrac{343-\dfrac{14\times 7(abc+70)}{39}+3abc}{\dfrac{49(abc+70)}{39}-abc}$　（∵ ③より）

$$=\frac{13{,}377-98(abc+70)+117abc}{49(abc+70)-39abc}=\frac{19(abc+343)}{10(abc+343)}=\frac{19}{10}$$

本書には簡単な、しかしなかなか思いつかないユニークな別解が付いています。私も思いつきませんでした。頭が固くなっているのでしょうね。

一度挑戦してみて下さい。解答は裏面にあります。

2. ユニークな別解（問題集の解答）

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+3=\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}+1$$

$$\frac{7}{b+c}+\frac{7}{c+a}+\frac{7}{a+b}=7\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)=\frac{7\cdot 7}{10}=\frac{49}{10}$$

これから　求める解は　$\frac{49}{10}-3=\frac{19}{10}$　であることがわかります。