私の数学散歩道(24)　平成 27 年 6 月 8 日提出

無理方程式 $-1+\sqrt{4x^2+8x+1}=\sqrt{3(x^2-1)}+\sqrt{5-x^2}$ について

数実研会員　村田　洋一

題記の方程式と問題 B は、［初等数学］第 76 号掲載の「課題１」(問題A)をヒントに作題したもので、当初の問題の視点を変えて見たものと言える。

（課題の解答は 9 月下旬発行の第 77 号で発表予定）

（問題 A）△ABC において AB＝１、∠ABC=120°のとき、辺 AC の上の点 P を PC=1 となるようにとり、AP=x とおく。∠ABP=90°となっているとき、BC=x^2 であることを示せ。　高次方程式なしにできるでしょうか。(図は cf. 席上配布資料)

（問題 B）無理方程式 $-1+\sqrt{4x^2+8x+1}=\sqrt{3(x^2-1)}+\sqrt{5-x^2}$ ・・(＊) について

(1)　(＊)を整係数の代数方程式に変形せよ。

(2)　(1)を解き $x>0$ の実数解を求めよ。

(3)　(2)の実数解を(＊)の右辺、左辺に代入し、各辺に共通する値を求めよ。
これにより(2)の解が(＊)の解であることを再確認せよ。

(問題 A の解答)

BP=$\sqrt{x^2-1}$　△PBC に余弦定理を適用して $\cos 30^\circ=\dfrac{BC^2+x^2-1-1}{2BC\sqrt{x^2-1}}$

$BC^2-\sqrt{3(x^2-1)}\cdot BC+x^2-2=0$　　$BC=\dfrac{1}{2}\left\{\sqrt{3(x^2-1)}\pm\sqrt{5-x^2}\right\}$・・・①

また△ABC に余弦定理を適用して　$BC=\dfrac{1}{2}\left\{-1\pm\sqrt{4x^2+8x+1}\right\}$ ・・・②

①で根号内>0 より $1<x<\sqrt{5}$　BC>0 より $3(x^2-1)>5-x^2$　$x>\sqrt{2}$

②で AP=$x>0$　BC>0 より 複号のマイナスは不適　従って

$1<x<\sqrt{5}$ のとき　$\dfrac{1}{2}\left\{\sqrt{3(x^2-1)}+\sqrt{5-x^2}\right\}=\dfrac{1}{2}\left\{-1+\sqrt{4x^2+8x+1}\right\}$・・③

$\sqrt{2}<x<\sqrt{5}$ のとき　$\dfrac{1}{2}\left\{\sqrt{3(x^2-1)}-\sqrt{5-x^2}\right\}=\dfrac{1}{2}\left\{-1+\sqrt{4x^2+8x+1}\right\}$・・④

を解けばよいが、結構大変である。ここでは簡便法になるが 題意から③, ④が x^2 に等しいと仮定して⑤の各々の 2 つの方程式を解き、共通解を示すことを考える。

以下 $\sqrt{3(x^2-1)} \pm \sqrt{5-x^2} = -1+\sqrt{4x^2+8x+1} = 2x^2$ ・・・⑤ として

③の右辺より $-1+\sqrt{4x^2+8x+1} = 2x^2$ $(2x^2+1)^2 = 4x^2+8x+1$ から

$4x^4-8x = 4x(x^3-2) = 0$ x は正の実数より $x = \sqrt[3]{2} \approx 1.26$ （$1 < x < \sqrt{5}$ を満たす）

③、④の左辺は $\sqrt{3(x^2-1)} \pm \sqrt{5-x^2} = 2x^2$ 平方して整理すると

$2x^4-x^2-1 = \pm\sqrt{3(x^2-1)(5-x^2)}$ $(x^2-1)(2x^2+1) = \pm\sqrt{3(x^2-1)(5-x^2)}$

$\sqrt{x^2-1} \neq 0$ より $(2x^2+1)\sqrt{x^2-1} = \pm\sqrt{3(5-x^2)}$ ここで左辺＞0 より右辺＞0

従って④は成り立たない。 複号の（－）を捨てて

$(2x^2+1)\sqrt{x^2-1} = \sqrt{3(5-x^2)}$ から $(2x^2+1)^2(x^2-1) = 3(5-x^2)$

整理して $x^6 = 4$ $x^3 = 2$ から⑤は $1 < x < \sqrt{5}$ を満たす共通解 $\sqrt[3]{2}$ を持つ。
逆にこのときに限り AP=x であれば BC=x^2 となる。

最終的には二項方程式になるものの、高次方程式なしでは解けない。

AP=$x(=\sqrt[3]{2})$ のとき BC=$x^2(=\sqrt[3]{4})$ となる。 ・・・(答)

以　上

(問題 B の解答)

(1) 根号をはずす際にはできるだけ x^2 の係数が右辺、左辺から消えるよう式変形

$\sqrt{3(x^2-1)}+1 = \sqrt{4x^2+8x+1} - \sqrt{5-x^2}$ として

平方して整理すると $4(x+1) - \sqrt{3(x^2-1)} = \sqrt{(4x^2+8x+1)(5-x^2)}$

更に平方して整理すると

$-8(x+1)\sqrt{3(x^2-1)} = (4x^2+8x+1)(5-x^2) - 19x^2 - 32x - 13$

$2(x+1)\sqrt{3(x^2-1)} = x^4+2x^3-2x+2$

平方して整理すると

$(x^4+2x^3-2x+2)^2-12(x+1)^3(x-1)=0$　　整理して

$x^8+4x^7+4x^6-4x^5-16x^4-16x^3+4x^2+16x+16=0$　　・・(答)

(2)上記の式は 3 項毎に因数分解できるので

$x^6(x+2)^2-4x^3(x+2)^2+4(x+2)^2=0$

$(x+2)^2(x^6-4x^3+4)=(x^3-2)^2(x+2)^2=0$

ここで x の変域から $x=-2$ は無縁根となり $x=\sqrt[3]{2}$ のみが解・・(答)

(3) $\sqrt[3]{2}<\sqrt{2}$ で ③に $x=\sqrt[3]{2}$ を代入して

$$右辺=\frac{1}{2}\left\{-1+\sqrt{4\sqrt[3]{4}+8\sqrt[3]{2}+1}\right\}=\frac{1}{2}\left\{-1+(4\sqrt[3]{4^2}+4\sqrt[3]{4}+1)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{-1+(2\sqrt[3]{4}+1)^{2\times\frac{1}{2}}\right\}=\sqrt[3]{4}$$　　共通の値は　$2\sqrt[3]{4}$

$x=2^{\frac{1}{3}}$ を(∗)の右辺に代入して $\sqrt{3(2^{\frac{2}{3}}-1)}+\sqrt{5-2^{\frac{2}{3}}}=2\cdot 2^{\frac{2}{3}}$ であればよい。

平方して $4\cdot 2^{\frac{4}{3}}=3(2^{\frac{2}{3}}-1)+(5-2^{\frac{2}{3}})+2\sqrt{3(2^{\frac{2}{3}}-1)(5-2^{\frac{2}{3}})}$

$\frac{1}{2}\left\{8\cdot 2^{\frac{1}{3}}-2\cdot 2^{\frac{2}{3}}-2\right\}=\sqrt{3(6\cdot 2^{\frac{2}{3}}-2\cdot 2^{\frac{1}{3}}-5)}$　　更に平方して差をとると

$(4\cdot 2^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{2}{3}}-1)^2-3(6\cdot 2^{\frac{2}{3}}-2\cdot 2^{\frac{1}{3}}-5)$

$=16\cdot 2^{\frac{2}{3}}+2\cdot 2^{\frac{1}{3}}+1-2\cdot 4\cdot 2+2\cdot 2^{\frac{2}{3}}-8\cdot 2^{\frac{1}{3}}-18\cdot 2^{\frac{2}{3}}+6\cdot 2^{\frac{1}{3}}+15$

$=(16+2-18)\cdot 2^{\frac{2}{3}}+(2-8+6)\cdot 2^{\frac{1}{3}}+(1-16+15)=0$

よって(∗)の各辺の共通の値は $2\sqrt[3]{4}$ で、$x=\sqrt[3]{2}$ は(∗)の解である。・・・(答)

以　上