私の数学散歩道(23)　平成 27 年 2 月 1 日提出

$\cos 20°, \cos 40°, \cos 80°$ を解とする数値係数の 3 次方程式を探る

数実研会員　村田　洋一

数学散歩道(20)で正接の角がA．P．をなす $\tan\alpha = \tan 2\alpha \tan 3\alpha \tan 4\alpha$ $\left(-\frac{\pi}{2} < 4\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ を満たす角 α を求めましたが、今回は余弦の角がG．P．をなす問題を考えてみました。

（ 問 題 ）

余弦の 3 倍角の公式を使わずに（1）$\cos 20°$ を一つの解とする 3 次方程式を作り、その他の 2 解も示し 更に（2）$\cos 20°$、$\cos 40°$、$\cos 80°$ を解に持つ 3 次方程式を作って下さい。

尚、3 次の係数は整数とし、方程式の解 及びその他の係数は小数第 4 位（小数第 5 位を四捨五入）まで求めるものとします。

（ 解 答 ）

(1) 余弦の 3 倍角の公式を使うと簡単である。

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ で $\theta = 20°$ として $8\cos^3\theta - 6\cos\theta - 1 = 0$ となるが、

題意から使えないので 正弦、余弦の $20°$、$40°$、$80°$ の間の関係をフルに活用して

$$\sin 40° = 2\sin 20° \cos 20° = \sin(60° - 20°) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20° - \frac{1}{2}\sin 20° \quad ・・・①$$

$$\sin 80° = 2\sin 40° \cos 40° = 4\sin 20° \cos 20°(\cos^2 20° - \sin^2 20°)$$

$$= \sin(60° + 20°) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20° + \frac{1}{2}\sin 20° \quad ・・・②$$

①，②より $\sin 20° = x$、$\cos 20° = y$ として連立方程式に帰着させる。

$$2xy = \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2}x \qquad 4xy = \sqrt{3}y - x \quad ・・・③$$

$$4xy(y^2 - x^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}x \qquad 8xy(y^2 - x^2) = \sqrt{3}y + x \quad ・・・④$$

④－③より　$8xy(y^2 - x^2) - 4xy = 2x$

$x \neq 0$ より　$4y(y^2 - x^2) - 2y = 1$　　$x^2 + y^2 = 1$ であるから

$4y(2y^2 - 1) - 2y = 1$　　よって　$8y^3 - 6y - 1 = 0$　　・・・⑤

が求める最初の 3 次方程式である。

⑤を次の公式（マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック　P32）で解く。

3 次方程式:　$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$ （a_1, a_2, a_3 は実数）の解は

$Q = \dfrac{3a_2 - {a_1}^2}{9}$, $R = \dfrac{9a_1 a_2 - 27a_3 - 2{a_1}^3}{54}$, $S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}$, $S = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$,

$D = Q^3 + R^2$ とすると　未知数を x として　$x^3 - \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{8} = 0$ から $a_1 = 0,\quad a_2 = -\dfrac{3}{4}$,

$a_3 = -\dfrac{1}{8}$ ；$Q = -\dfrac{1}{4},\quad R = \dfrac{1}{16},\quad D = -\dfrac{1}{64} + \dfrac{1}{256} = -\dfrac{3}{256} < 0$

$D < 0$　のときの解は　$x_1 = 2\sqrt{-Q}\cos\dfrac{\theta}{3} - \dfrac{1}{3}a_1,\quad x_2 = 2\sqrt{-Q}\cos(\dfrac{\theta}{3} + 120°) - \dfrac{1}{3}a_1$,

$x_3 = 2\sqrt{-Q}\cos(\dfrac{\theta}{3} + 240°) - \dfrac{1}{3}a_1$　ここで $\cos\theta = R/\sqrt{-Q^3}$

$x_1 + x_2 + x_3 = -a_1 \qquad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a_2 \qquad x_1x_2x_3 = -a_3$

従って　$\cos\theta = \dfrac{1}{16}\bullet 8 = \dfrac{1}{2}$　$\theta = 60°$ であるから $x_1 = \cos 20°,\ x_2 = \cos 140° = -\cos 40°$

$x_3 = \cos 260° = \cos 100° = -\cos 80°$

これらのことから　$\cos 20°, -\cos 40°, -\cos 80°$ が求める解となる。

⑤より　解と係数の関係から

$\cos 20° - \cos 40° - \cos 80° = 0$　・・・⑥

$-\cos 20°\cos 40° + \cos 40°\cos 80° - \cos 80°\cos 20° = -\dfrac{3}{4}$　・・・⑦

$\cos 20°(-\cos 40°)(-\cos 80°) = \dfrac{1}{8}$　・・・⑧　となる。

⑵ 未知数を x とし x^3 の係数を 1 とすると、$\cos 20°, \cos 40°, \cos 80°$ を解とする方程式は

$(x - \cos 20°)(x - \cos 40°)(x - \cos 80°) = 0$　　これから

$x^3 - (\cos 20° + \cos 40° + \cos 80°)x^2$

$+ (\cos 20°\cos 40° + \cos 40°\cos 80° + \cos 80°\cos 20°)\,x - \cos 20°\cos 40°\cos 80° = 0$

となるが、ここで　x^2, x の係数と定数項を具体的に決める必要がある。

三角関数の和積、積和の公式をフルに活用しても三角関数をすべて消去できないから

⑥、⑦、⑧と比較して求める方程式の係数を　$\cos 20°$ の式で表す。

$\cos 20° + \cos 40° + \cos 80° = 2\cos 20°$

$\cos 20°\cos 40° + \cos 40°\cos 80° + \cos 80°\cos 20° = 2\cos 40°\cos 80° + \dfrac{3}{4}$

$= \dfrac{1}{4\cos 20°} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}(3 + \dfrac{1}{\cos 20°})$　　　$\cos 20°\cos 40°\cos 80° = \dfrac{1}{8}$ は共通

これから求める方程式は

$$x^3-2x^2\cos 20°+\frac{1}{4}(3+\frac{1}{\cos 20°})x-\frac{1}{8}=0 \qquad \cdots\cdots\cdot ⑨$$

ここで $\cos 20°$ を代数的に求められるとして ⑤より $y^3+3(-\frac{1}{4})y+(-\frac{1}{8})=0$ で

これをカルダノの公式で解く。

$p=-\frac{1}{4},\quad q=-\frac{1}{8}$ で $A=\sqrt{q^2+4p^3}\quad B=\sqrt[3]{\frac{-q+A}{2}}\quad C=-\frac{p}{B}$ とおくと

$A=\sqrt{-\frac{3}{64}}=\frac{\sqrt{3}i}{8}\quad B=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}\quad C=\frac{1}{2\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}}$ ここで

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}}=\frac{\sqrt[3]{\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2}}{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}=\frac{2\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}}}{1+\sqrt{3}i}=\frac{2(1-\sqrt{3}i)\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}}}{4}=\frac{\sqrt[3]{(1-\sqrt{3}i)^3\cdot\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}}}{2}$$

$(1-\sqrt{3}i)^3=-2(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=-8$ より $\quad =\frac{\sqrt[3]{(-8)\times\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}}}{2}=\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}}$

従って $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とすると $\omega+1=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\quad -\omega=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ より 3 個の解は

$$B+C=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}})=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{\omega+1}-\sqrt[3]{\omega}) \qquad \cdot\cdot\cdot ⑩$$

$$\omega B+\omega^2C=\frac{1}{2}\omega(\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}+\omega\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}})=\frac{1}{2}\omega(\sqrt[3]{\omega+1}-\omega\sqrt[3]{\omega}) \qquad \cdot\cdot\cdot ⑪$$

$$\omega^2B+\omega C=\frac{1}{2}\omega(\omega\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}})=\frac{1}{2}\omega(\omega\sqrt[3]{\omega+1}-\sqrt[3]{\omega}) \qquad \cdot\cdot\cdot ⑫$$

一方

$f(y)=y^3-\frac{3}{4}y-\frac{1}{8}$ と 置いて $f'(y)=3y^2-\frac{3}{4}=3(y+\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2})=0$ から

$f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{8}$ が極大値、$f(\frac{1}{2})=-\frac{3}{8}$ が極小値で $f(-\frac{1}{2})\cdot f(\frac{1}{2})=-\frac{3}{64}<0$ より

$f(y)=0$ は 3 個の相異なる実数解を持つ。

$f(1)=\frac{1}{8}>0,\quad f(\frac{1}{2})=-\frac{3}{8}<0,\ f(0)=-\frac{1}{8}<0,\ f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{8}>0$ などから

解の大きい順に y_1,y_2,y_3 とすると $\frac{1}{2}<y_1<1, -\frac{1}{2}<y_2<0, -1<y_3<-\frac{1}{2}$

実数解が存在するのにカルダノの公式では解けない。また複素数には大小がないので
例え ⑩,⑪,⑫と y_1, y_2, y_3 の間に対応関係があったとしても判断できない。

因みに ⑩で $k = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{\omega+1} - \sqrt[3]{\omega})$ （k は定数)として両辺を 3 乗すると

$$k^3 = \frac{1}{8}\left\{(\omega+1) - \omega - 3\sqrt[3]{\omega(\omega+1)}(\sqrt[3]{\omega+1} - \sqrt[3]{\omega})\right\} = \frac{1}{8}(1+6k)$$

これから $8k^3 - 6k - 1 = 0$ で初めに戻ってしまう。本問は特殊な角の三等分問題でもあり、
<u>これらの値を代数的に求めるのは不可能ということが証明されている。</u>（注-１）（注-2）

それなら数値解法によるしかない。ホーナーの方法により求めてみよう。
⑤で $y(=\cos 20°) > 0$ である。
$f(y) = 8y^3 - 6y - 1$ と 置き、この方程式の最初の近似解を α_0 とする。
次の解 α_1 は $\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{f(\alpha_0)}{f'(\alpha_0)}$ で与えられる。$f'(y) = 6(4y^2 - 1)$

$f(1) = 1$ $f'(1) = 18$ $\alpha_1 = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$

$f(\frac{17}{18}) = \frac{4913}{729} - \frac{20}{3} = \frac{53}{729}$ $f'(\frac{17}{18}) = \frac{6(17^2 - 9^2)}{81} = \frac{416}{27}$

$$\alpha_2 = \frac{17}{18} - \frac{52}{729} \times \frac{27}{416} = \frac{17 \cdot 3 \cdot 2^4 \cdot 13 - 53}{3^3 \cdot 2^5 \cdot 13} = \frac{10555}{11232} = 0.9397$$

$f'(0.9397) = 15.1929$ $f(0.9397) = 6.6383 - 5.6382 - 1 = 0.0001$

$\alpha_3 = 0.9397 - \frac{0.0001}{15.1929} = 0.9397$ 従って $y(=\cos 20°) = 0.9397$

これを ⑨ に代入して整理すると $x^3 - 1.8794x^2 + 1.0160x - 0.125 = 0$
従って $8x^3 - 15.0352x^2 + 8.1280x - 1 = 0$ ・・・⑬
が求める方程式である。

因みに倍角公式 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ より他の 2 つの解は $-\cos 40° = -0.7660$
$-\cos 80° = -0.1736$ と計算できる。

なお、p.5～6 に本問から派生した新作問題を参考まで掲載、p.7 には Maxima での方程式
$8x^3 - 6x - 1 = 0$ の 1. 解の代数式による表現、2. 具体的な数値解を別紙で示した。

（ 問 題 ）

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}}\right) \qquad y_2 = \frac{1}{2}\omega\left(\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}} + \frac{\omega}{\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}}\right)$$

$$y_3 = \frac{1}{2}\omega\left(\omega\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}}\right)$$ 但し、$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ について

(1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}} = \sqrt[3]{\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}}$ であることを示せ。

(2) y_1, y_2, y_3 を 3 個の解とする整係数の 3 次方程式を求めよ。

(3) (2)の方程式の 1 つの解は$\cos 20°$ である。他の 2 つの解を求めよ。

（ 解 答 ）

(1) p.3 の式変形で $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}} = \sqrt[3]{\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}}$ が示せるので、$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とすると

$\omega + 1 = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ $\quad -\omega = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ から $y_1 = \dfrac{1}{2}(\sqrt[3]{\omega+1} - \sqrt[3]{\omega})$ $\quad y_2 = \dfrac{1}{2}\omega(\sqrt[3]{\omega+1} - \omega\sqrt[3]{\omega})$

$y_3 = \dfrac{1}{2}\omega(\omega\sqrt[3]{\omega+1} - \sqrt[3]{\omega})$ また $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ となる。

(2) 計算の簡略化のため $a = \sqrt[3]{\omega+1}$ $\quad b = \sqrt[3]{\omega}$ とおくと

$y_1 = \dfrac{1}{2}(a-b)$ $\quad y_2 = \dfrac{1}{2}\omega(a - b\omega)$ $\quad y_3 = \dfrac{1}{2}\omega(a\omega - b)$

3 次方程式の解と係数の関係を使って

a） $y_1 + y_2 + y_3 = \dfrac{1}{2}(a-b) + \dfrac{1}{2}\omega(a-b) + \dfrac{1}{2}\omega^2(a-b) = \dfrac{1}{2}(a-b)(\omega^2+\omega+1) = 0$

b） $y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1$ は各項に分けて

$$y_1y_2 = \frac{1}{4}\omega(a-b)(a-b\omega) = \frac{1}{4}\left\{(a^2-ab)\omega + (b^2-ab)\omega^2\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{(a^2-ab)\omega - (b^2-ab)(\omega+1)\right\} = \frac{1}{4}\left\{(a^2-b^2)\omega + ab - b^2\right\}$$

$$y_2y_3 = \frac{1}{4}\omega^2(a-b\omega)(a\omega-b) = \frac{1}{4}(a\omega^2-b)(a\omega-b)$$

$$=\frac{1}{4}(a^2-ab\omega^2-ab\omega+b^2)=\frac{1}{4}\{a^2-ab(\omega^2+\omega)+b^2\}=\frac{1}{4}(a^2+ab+b^2)$$ 同様に

$$y_3y_1=\frac{1}{4}\omega(a-b)(a\omega-b)=\frac{1}{4}\{\omega^2(a^2-ab)+(b^2-ab)\omega\}=\frac{1}{4}\{(b^2-a^2)\omega-(a^2-ab)\}$$

従って $y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1=\frac{1}{4}\times 3ab=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\omega(\omega+1)}=-\frac{3}{4}$

c） $y_1y_2y_3=y_1\cdot y_2y_3=\frac{1}{8}(a-b)(a^2+ab+b^2)=\frac{1}{8}(a^3-b^3)=\frac{1}{8}$

よって　変数を y とすると　$y^3-\frac{3}{4}y-\frac{1}{8}=0$ から　$8y^3-6y-1=0$　を得る。

(3)　3解を $\alpha(=\cos 20°),\beta,\gamma$ とすると 解と係数の関係を整理して

$\beta+\gamma=-\cos 20°$ ・・①　$\beta\gamma=-\frac{3}{4}+\cos^2 20°$ ・・②　$\beta\gamma=\frac{1}{8\cos 20°}$ ・・③

①, ② より β,γ を解とする 2 次方程式は　$t^2+t\cos 20°+\cos^2 20°-\frac{3}{4}=0$

$$t=\frac{-\cos 20°-\sqrt{\cos^2 20°-4(\cos^2 20°-3/4)}}{2}=-\frac{\cos 20°+\sqrt{3}\sin 20°}{2}=-\frac{1}{2}\cdot 2\cos(60°-20°)$$

$=-\cos 40°$　($\because \beta,\gamma<0$ ・・cf.　p.3 文末)　　①より $\beta=-\cos 40°$ とすると

$\gamma=\cos 40°-\cos 20°=2\sin 30°\sin(-10°)=-\sin 10°=\cos 100°=\cos(180°-80°)=-\cos 80°$

このとき、③は$\cos 20°\cos 40°\cos 80°=\frac{1}{8}$　で成立、他の 2 解は$-\cos 40°,-\cos 80°$となる。

以　上

（参考文献等）

注-1)　安田先生に次の文献のご紹介とコメントをいただきました。（関連分のみ抜粋）

高木 貞治著　「代数学講義」（共立出版）改訂新版

34 節　3 次方程式の 3 個の実根を実数の解法によって得る問題は解決できず、「不還元の場合」と呼ばれていた。現今ではこの問題は不可能であることが知られている。すなわち、「冪根で方程式の 3 個の実根を表すためには、複素数の立方根を避けることは不可能」である。

注-2)　わかりやすい解説を見つけましたので紹介します。

矢野　健太郎著　「角の三等分」（ちくま学芸文庫）　～一松　信　解説～

第 I 部　角の三等分　第 7 章　60°という角は三等分不可能なることの証明

第 II 部　解説　5. 三次方程式の解法　とくに 5-3.　不還元な場合

（別 紙）

Maxima による 3 次方程式 $8x^3-6x-1=0$ の

1. 解の代数式による表現、2. 具体的な数値解

1. (%i1) solve (8*x^3-6*x-1=0,x);

(%o1)

解の代数式による表現 　　　　　　　　　　ω による表現

$$X=\frac{\frac{\sqrt{3}i}{2}-\frac{1}{2}}{4\left(\frac{\sqrt{3}i}{16}+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}}}+\left(-\frac{\sqrt{3}i}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}i}{16}+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \left(=\frac{1}{2}\omega\left(\omega\sqrt[3]{\omega+1}-\sqrt[3]{\omega}\right)\right)$$

$$X=\left(\frac{\sqrt{3}i}{16}+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}i}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{-\frac{\sqrt{3}i}{2}-\frac{1}{2}}{4\left(\frac{\sqrt{3}i}{16}+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}}} \qquad \left(=\frac{1}{2}\omega\left(\sqrt[3]{\omega+1}-\omega\sqrt[3]{\omega}\right)\right)$$

$$X=\left(\frac{\sqrt{3}i}{16}+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{4\left(\frac{\sqrt{3}i}{16}+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}}} \qquad \left(=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\omega+1}-\sqrt[3]{\omega}\right)\right)$$

2. (%i2) allroots (8*x^3-6*x-1=0,x);

(%o2)

具体的な数値解

X＝－0.1736481776 6693

X＝－0.7660444431 1898

X＝＋0.9396926207 8591

注）1. で演算子 % の表記並びにソフトのバージョンの説明等を省略