私の数学散歩道(22)追加分　平成 27 年 2 月 1 日提出

$x^4 - x^3 + 5x^2 - 3x + 6 > 0$ を証明せよ。

数実研会員　村田　洋一

(問　題) 7.　$x^4 - x^3 + 5x^2 - 3x + 6 > 0$ を証明せよ。　　(自作問題)

(解　答)

左辺を $f(x)$ とおく。$f(1) = 8$，$f(-1) = 16$，$f(2) = 28$，$f(-2) = 56$，$f(3) = 96$

$f(-3) = 168$　$f(6) = 1248$，$f(-6) = 1716$ から $f(x)$ は一次因数をもたない。

そこで 2 次×2 次の既約の因数を考える。

$x^4 - x^3 + 5x^2 - 3x + 6 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$　とおき 右辺を満たす

定数 a, b, c, d が見つかるかどうか検討する。 条件より 右辺を展開して

$x^4 - x^3 + 5x^2 - 3x + 6 = x^4 + (c + a)x^3 + (b + d + ac)x^2 + (ad + bc)x + bd$

係数比較して連立方程式を解く。

$c + a = -1$・・①　$b + d + ac = 5$・・②　$ad + bc = -3$・・③　$bd = 6$・・④

①より　$a = -(c + 1)$　　④より　$d = \dfrac{6}{b}$　　これらを　②, ③に代入

②より　$b + \dfrac{6}{b} - c(c + 1) = 5$　　これから　$b^2 - bc(c + 1) - 5b + 6 = 0$・・⑤

③より　$-\dfrac{6(c + 1)}{b} + bc = -3$　　これから　$c = -\dfrac{3(b - 2)}{b^2 - 6}$・・⑥

⑥を⑤に代入　$b^2 - b\left\{\dfrac{9(b - 2)^2}{(b^2 - 6)^2} - \dfrac{3(b - 2)}{b^2 - 6}\right\} - (5b - 6) = 0$

$b^2(b^2 - 6)^2 - 9b(b - 2)^2 + 3b(b - 2)(b^2 - 6) - (5b - 6)(b^2 - 6)^2 = 0$

$(b^2 - 6)^2(b - 2)(b - 3) + 3b^2(b - 2)(b - 3) = 0$

$(b - 2)(b - 3)(b^4 - 9b^2 + 36) = 0$　　$(b - 2)(b - 3)(b^4 - 9b^2 + 36) = 0$

$b^4 - 9b^2 + 36 = (b^2 - \dfrac{9}{2})^2 + \dfrac{63}{4} > 0$　b は実数より　$b = 2$ or $b = 3$

1. $b = 2$ のとき　④より　$d = 3$　これらを②, ③に代入し

   $c + a = -1$　$ac = 0$　$3a + 2c = -3$　の 3 式を満たすのは $a = -1$　$c = 0$

2. 同様に　$b = 3$ のとき　$d = 2$　$a = 0$　$c = -1$

いずれの場合も　$x^4 - x^3 + 5x^2 - 3x + 6 = (x^2 + 3)(x^2 - x + 2)$ と因数分解される。

この右辺の第 1 項、2 項とも正より　$x^4 - x^3 + 5x^2 - 3x + 6 > 0$

注）本問は安房先生、菊池先生のアドバイスによりタイトルと問題、解答の一部を
配布済の原稿から訂正しました。