私の数学散歩道(22)　　平成 26 年 12 月 1 日提出

少し工夫が要る不等式の証明 (2)

数実研会員　村田　洋一

前回同様「数学のいずみ」掲載の 柳田五男氏編「初等的な不等式」から興味深く、かつ有名・無名の定理や補助公式を使わず、定石や正攻法を使い ある程度高校生が解けると考えた不等式 6 問を選び解答をつけたものです。

オリジナルにはうまい解答がついていますが、上記の考えから殆ど小生なりの方法で解答しました。掲載問題は数百題にのぼりＩＭＯ関連等 難しい問題も多いですが、少しずつチャレンジしていきたいと思っています。

１．問題の提示

1. a, b, c は正の実数で　$a+b+c=1$ を満たすとき

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c} \leq 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)$$

を示せ。　（日本 IMO 選抜本選　2004）

2. a, b, c は正の実数、$abc=1$ のとき

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1$$

を示せ。　（IMO　2000）

3. $ab>0$ のとき

$$\sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

を示せ。　（Czech Slovakia　2000）

4. x, y, z は正の実数で　$xyz=1$ のとき　（Centro American Math Olympiad　2009）

$$(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1) \geq \left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)$$

を示せ

5. 1)　$a,b,c>0$　のとき

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}$$

2)　n は 3 以下の自然数　$a+b+c=ab+bc+ca$　$a,b,c>0$ のとき

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+\frac{3n}{a^2+b^2+c^2} \geq 3+n \quad \cdots(*)$$

(Samin Riasat)

6. $0 \leq x < 1$ のとき

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2x+\frac{1}{2}\right) \geq 2x\sqrt{1-x^2}$$

を示せ。　（自作問題）

２．問題の解答

1.　a, b, c は正の実数で　$a+b+c=1$ を満たすとき

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\leq 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)$$　を示せ。　（日本 IMO 選抜本選　2004）

$a+b+c=1$ を適宜使って　左辺 分母＝$1-(a+b+c)+ab+bc+ca-abc$

＝$ab+bc+ca-abc>0$　（$\because 1-a, 1-b, 1-c>0$）

分子＝$(1+a)(1-b)(1-c)+(1+b)(1-a)(1-c)+(1+c)(1-a)(1-b)$

上記の　第 1 項＝$1+a-b-c-ab+bc-ca+abc$

同様に　第 2 項＝$1-a+b-c-ab-bc+ca+abc$

第 3 項＝$1-a-b+c+ab-bc-ca+abc$　から

$=3-(a+b+c)-(ab+bc+ca)+3abc=2-(ab+bc+ca)+3abc$

従って　右辺―左辺＝$\dfrac{2(a^2b+b^2c+c^2a)}{abc}-\dfrac{2-(ab+bc+ca)+3abc}{ab+bc+ca-abc}$

$$=\frac{2(a^2b+b^2c+c^2a)}{abc}-\frac{2-(ab+bc+ca-abc+abc)+3abc}{ab+bc+ca-abc}$$

$$\geq\frac{2\cdot 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3}}{abc}-\frac{2(abc+1)}{ab+bc+ca-abc}+1=7-\frac{2\{ab(1-a-b)+1\}}{ab+bc+ca-abc}\quad (*)$$

第 2 項の分母＞0　より　分子の変域を調べるとよい。

分子を　$f(a,b)=2(a^2b+ab^2-ab-1)$　と置いて　a,b で偏微分して

$f_a(a,b)=2(2ab+b^2-b)=0$　　$f_b(a,b)=2(a^2+2ab-a)=0$

$a\neq 0, b\neq 0$　　$2a+b-1=0$　　$a+2b-1=0$　　これを解くと　$a=b=\dfrac{1}{3}$

$f_{aa}(a,b)=4b$　　$f_{ab}(a,b)=2(2a+2b-1)$　　$f_{bb}(a,b)=4a$

$\Lambda^{(1)}=f_{aa}(\frac{1}{3},\frac{1}{3})=\frac{4}{3}>0$　　$\Lambda^{(2)}=f_{aa}(\frac{1}{3},\frac{1}{3})f_{bb}(\frac{1}{3},\frac{1}{3})-f_{ab}{}^2(\frac{1}{3},\frac{1}{3})=\frac{4}{3}>0$

$\Lambda^{(1)}>0$，$\Lambda^{(2)}>0$　より　$f(\frac{1}{3},\frac{1}{3})=2(\frac{1}{27}+\frac{1}{27}-\frac{1}{9}-1)=-\frac{56}{27}$　は極(最)小値

（＊）全体では　$7+\left(-\dfrac{56}{27}\right)\cdot\dfrac{27}{8}=0$　で与えられた不等式は成り立つ。

等号は条件と $a=b=c$　から　$a=b=c=\dfrac{1}{3}$　のとき成立する。

2.　a, b, c は正の実数、$abc=1$ のとき

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 1$$　を示せ。　（IMO　2000）

$abc=1$を適宜使って

左辺＝$(a+\frac{1}{b}-1)(b+\frac{1}{c}-1)(c+\frac{1}{a}-1)=(a+\frac{1}{b})(b+\frac{1}{c})(c+\frac{1}{a})-(a+\frac{1}{b})(b+\frac{1}{c})$

$-(b+\frac{1}{c})(c+\frac{1}{a})-(c+\frac{1}{a})(a+\frac{1}{b})+(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})-1$

第 1 群＝$abc+a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{abc}$＝$2+a+b+c+ab+bc+ca$

第 2 群＝$-\left\{ab+bc+ca+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+3\right\}$

$=-\left\{ab+bc+ca+a^2b+b^2c+c^2a+a+b+c+3\right\}$

第 3 群+第 4 群=$a+b+c+ab+bc+ca-1$

従って　左辺—右辺＝$(a+b+c)+(ab+bc+ca)-(a^2b+b^2c+c^2a)-3$

$\geq 3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}-3-(a^2b+b^2c+c^2a)=3+3-3-(a^2b+b^2c+c^2a)$

$=3-(a^2b+b^2c+c^2a)\leq 0$　（$\because a^2b+b^2c+c^2a\geq 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3}=3$）

等号は条件と$a=b=c$　から　$a=b=c=1$　のとき成立する。

3.　$ab>0$　のとき

$\sqrt[3]{2(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}\geq\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$　を示せ。　（Czech Slovakia　2000）

$a<0, b<0$のときを含めて 両辺が正より 3 乗して差を計算すると

$2(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})-\frac{b}{a}-\frac{a}{b}-3\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\left\{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right\}$＝$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+4-3\left\{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right\}\geq 0$を

示せばよい。　$\sqrt[3]{\frac{b}{a}}=x(>0)$と置けば　$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{1}{x}$　また$t=x+\frac{1}{x}$として　$t\geq 2$

与式　$f(t)=x^3+\frac{1}{x^3}-3(x+\frac{1}{x})+4=t(t^2-3)-3t+4=t^3-6t+4$

$f'(t)=3(t^2-2)=0$　から　$t=\sqrt{2}$で極小値をとるが 条件より　$t=2$

$f(2)=8-12+4=0$　　$f(t)\geq 0$（$t\geq 2$）より与えられた不等式は成り立つ。

等号は$x=1$から　$a=b$のとき。

4．x,y,z　は正の実数で　$xyz=1$のとき

$(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)\geq(1+\frac{x}{y})(1+\frac{y}{z})(1+\frac{z}{x})$　を示せ

（Centro American Math Olympiad　2009）

基本対称式に直し　$x+y+z=a,\quad xy+yz+zx=b$ とする。

$a \ge 3\sqrt[3]{xyz}$，$b \ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$ より　$a \ge 3$，$b \ge 3$　等号は $x=y=z$　のとき

左辺＝$1+x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2z^2$

$=2+(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)+(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)$

$=(x+y+z)^2-2(x+y+z)+(xy+yz+zx)^2-2(xy+yz+zx)+2$

$=a^2-2a+b^2-2b+2$

右辺＝$2+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=2+\dfrac{x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2}{xyz}$

$=2+xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)=2+xy(a-z)+yz(a-x)+zx(a-y)$

$=2+a(xy+yz+zx)-3xyz=ab-1$

左辺－右辺$=a^2-a(b+2)+b^2-2b+3=(a-\dfrac{b+2}{2})^2+\dfrac{3}{4}b^2-3b+2$

$=(a-\dfrac{b+2}{2})^2+\dfrac{3}{4}(b-2)^2-1 \ge (3-\dfrac{b+2}{2})^2+\dfrac{3}{4}(b-2)^2-1=b^2-5b+6$

$\ge 9-15+6=0$（$b \ge 3$）よって 与えられた不等式は成り立つ。

等号は条件と $a=b=3$　から　$x=y=z=1$　のとき成りたつ。

5.　1)　$a,b,c>0$　のとき

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \ge \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}$$

2)　n は 3 以下の自然数　$a+b+c=ab+bc+ca$　$a,b,c>0$ のとき

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+\frac{3n}{a^2+b^2+c^2} \ge 3+n \quad \cdot\cdot\cdot(*)$$ (Samin Riasat)

1)

左辺―右辺＝$\dfrac{(ab^3+bc^3+ca^3)(ab+bc+ca)-abc(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{abc(ab+bc+ca)}$

分子＝$(a^2b^4+ab^4c+a^2b^3c+ab^2c^3+b^2c^4+abc^4+a^4bc+a^3bc^2+a^4c^2)$

$-(a^4bc+a^2b^3c+a^2bc^3+a^3b^2c+ab^4c+ab^2c^3+a^3bc^2+ab^3c^2+abc^4)$

$=a^2b^4+b^2c^4+c^2a^4-a^2b^6c^4-a^4b^2c^6-a^6b^4c^2$

$=(ab^2)^2+(bc^2)^2+(ca^2)^2-ab^3c^2-a^2bc^3-a^3b^2c$

$=\dfrac{1}{2}\left\{(ab^2-bc^2)^2+(bc^2-ca^2)^2+(ca^2-ab^2)^2\right\} \ge 0$

分母＞0,　分子 ≥ 0 より与えられた不等式は成り立つ。また等号は $ab^2=bc^2=ca^2$ のときで　$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ より $a=b=c$ のとき成立する。

2) 1)の結果と条件から 右辺は

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}=a^2+b^2+c^2$$

従って次の不等式を証明すればよい。 $a^2+b^2+c^2+\dfrac{3n}{a^2+b^2+c^2}\ge 3+n$

$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}=k$ とおいて $(n+3)$ 個の加重平均をとり $(n+3)$ を消去する工夫をする。

左辺 $=3k+\dfrac{n}{k}=k+k+k+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k}+\cdot\ \cdot+\dfrac{1}{k}\ge(n+3)\sqrt[n+3]{\dfrac{k^3}{k^n}}=(n+3)\cdot k^{\frac{3-n}{n+3}}$

従って 左辺－右辺＝$(n+3)\cdot k^{\frac{3-n}{n+3}}-(n+3)=(n+3)(k^{\frac{3-n}{n+3}}-1)\ge 0$

n は $1\le n\le 3$ の自然数、$k=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}>0$ より $k^{3-n}\ge 1$

よって $k\ \ge 1$ でなければならない。 従って条件からこれを示せばよい。

一方 $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)=3(a+b+c)$

$a+b+c$ についての この二次不等式を解いて $a+b+c\ge 3$

また $3k=a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca=a+b+c\ge 3$

これから $k\ \ge 1$ で題意が証明された。

6. $0\le x<1$ のとき

$\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2x+\dfrac{1}{2})\ge 2x\sqrt{1-x^2}$ を示せ。 （自作問題）

式の形を見ると直線が常に曲線より大、または0であるから接線と曲線の大小関係と理解できる。右辺を $f(x)$ として

$f'(x)=2\sqrt{1-x^2}-\dfrac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=0$ から $0\le x<1$ より $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$f(\dfrac{1}{\sqrt{2}})=1$ で極大値をとる。 また等号が成立するときの x を求める。

別解の方法で 両辺の平方の差から $\dfrac{1}{12}(2x-1)^2(12x^2+12x+1)\ge 0$

$12x^2+12x+1=0$ は2解とも正の解を持たないから 等号をとるのは $x=\dfrac{1}{2}$ のとき。

そのときの接線 $g(x)$ は $f'(\dfrac{1}{2})=\dfrac{2(1-\frac{1}{2})}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ $f(\dfrac{1}{2})=\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から

$g(x)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}(x-\dfrac{1}{2})$　　よって　$g(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}(x+\dfrac{1}{4})=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2x+\dfrac{1}{2})$

$$f''(x)=\dfrac{-8x\sqrt{1-x^2}+\dfrac{2x(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\dfrac{4x^3-6x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{2x(2x^2-3)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$0\leq x<1$ では分子の $2x^2-3<0$ 正確には $-3<2x^2-3<-1$　　よって $f''(x)<0$

曲線は上に凸で、$0\leq x<1$ では常に接線の下側にあるから与えられた不等式は成立する。

また等号は $x=\dfrac{1}{2}$ のときに成立する。

（別 解）

$0\leq x<1$ のとき両辺が正または 0 より 平方の差をとって

$$(\frac{4}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{12})-4x^2(1-x^2)=4x^4-\frac{8}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{12}=\frac{1}{12}(48x^4-32x^2+8x+1)\geq 0$$

なればよい。因数定理より $x=\dfrac{1}{2}$ で 0 になり、また 上記第 3 式が重解を持つことと

考え併せ $\dfrac{1}{12}(2x-1)(24x^3+12x^2-10x-1)=\dfrac{1}{12}(2x-1)^2(12x^2+12x+1)\geq 0$

ここで $y=12x^2+12x+1=12(x+\dfrac{1}{2})^2-2$ であるが $0\leq x<1$ では $1\leq y<25$ で

常に正の値をとる。　等号は $x=\dfrac{1}{2}$ のときに成立する。

以　上