私の数学散歩道(21)　平成 26 年 8 月 10 日提出

少し工夫が要る不等式の証明 ～柳田五夫氏の「初等的な不等式」より～

数実研会員　村田　洋一

「数学のいずみ」の新着情報を見ていたら、「初等的な不等式」に余り見慣れない興味ある不等式がたくさん載っていました。今回はその中から有名・無名の定理や補助公式を使わず、定石や正攻法で高校生が解けると考えた不等式を 6 問選び解答をつけたものです。

オリジナルには解答がついている問題もありましたが、小生なりの方法で解答しました。掲載問題は数百題にのぼりＩＭＯ関連等 難かしい問題も多いですが、少しずつチャレンジしていきたいと思っています。

１．問題の提示

1. a, b, c は正の実数で　$abc = 8$ を満たすとき

$$\frac{a-2}{a+1} + \frac{b-2}{b+1} + \frac{c-2}{c+1} \leq 0$$

を示せ。　（ルーマニア　2008）

2. a, b, c は正の実数のとき

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

を示せ。　（英国　2005）

3. a, b, c は正の実数のとき

$$\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{b(b+1)} + \frac{1}{c(c+1)} \geq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}\right)$$

を示せ。

4. a, b, c が実数で　$a+b+c=0,$　$a^2+b^2+c^2=1$　のとき　$a^2b^2c^2 \leq \dfrac{1}{54}$

であることを証明せよ。　（アイルランド MO　2009）

5. $a^2+b^2+c^2=3abc$，$a,b,c>0$　のとき

$$\frac{a}{b^2c^2} + \frac{b}{c^2a^2} + \frac{c}{a^2b^2} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

を示せ。　（インド）

6. $a^2+b^2=1,$　$a,b>0$　のとき

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{b}{a^2+1} + \frac{a}{b^2+1}\right) \geq \frac{8}{3}$$

を示せ。

２．問題の解答

１．　a, b, c は正の実数で　$abc = 8$ を満たすとき　$\dfrac{a-2}{a+1} + \dfrac{b-2}{b+1} + \dfrac{c-2}{c+1} \leq 0$　を示せ。

分母の積＞0 より $(a-2)(b+1)(c+1) + (b-2)(c+1)(a+1) + (c-2)(a+1)(b+1) \leq 0$

・・①　を示せばよい。以下、$abc = 8$ またその変形を適宜利用して

第１項＝$(a-2)(bc+b+c+1) = abc + ab + ca - 2bc + a - 2b - 2c - 2$

$$= 6 + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} - \frac{2}{a} + a - 2b - 2c$$

第２項、第３項もサイクリックに考えて ①の左辺

$$= 18 + a + b + c - 2(a+b+c) - 2(a+b+c) - 2(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) + 2(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})$$

$= 18 - 3(a+b+c)$ ・・②　　ここで公式より　$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 6$ ・・③

等号は　$a = b = c = 2$ のとき、成立する。

②と③より　①の左辺≤ 0　で与式が証明された。

2.　a, b, c が正の実数のとき　$(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a})^2 \geq (a+b+c)(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c})$　を示せ。

$\dfrac{a}{b} = x, \dfrac{b}{c} = y, \dfrac{c}{a} = z$（$x, y, z > 0$）として

与式右辺＝$1 + \dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{a} + 1 + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} + \dfrac{c}{b} + 1 = 3 + x + \dfrac{1}{x} + y + \dfrac{1}{y} + z + \dfrac{1}{z}$

左辺＝$\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{a^2} + \dfrac{2a}{c} + \dfrac{2b}{a} + \dfrac{2c}{b} = x^2 + y^2 + z^2 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{2}{z}$

左辺―右辺＝$x^2 - x + \dfrac{1}{x} + y^2 - y + \dfrac{1}{y} + z^2 - z + \dfrac{1}{z} - 3$

$= \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x} + \dfrac{y^3 - y^2 - y + 1}{y} + \dfrac{z^3 - z^2 - z + 1}{z}$ ・・①　　ここで

第１項＝$\dfrac{x^2(x-1) - (x-1)}{x} = \dfrac{(x+1)(x-1)^2}{x} = \dfrac{(\frac{a}{b}+1)(\frac{a}{b}-1)^2}{\frac{a}{b}} = \dfrac{(a+b)(a-b)^2}{ab^2}$

第２項、第３項も同様にサイクリックに考えられる。

従って　①＝$\dfrac{(a+b)(a-b)^2}{ab^2} + \dfrac{(b+c)(b-c)^2}{bc^2} + \dfrac{(c+a)(c-a)^2}{ca^2} \geq 0$　から

与式が証明された。（等号は　$a = b = c$ で成立）

3.　a, b, c は正の実数のとき

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{b(b+1)}+\frac{1}{c(c+1)} \geq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)$$ を示せ。

チェビシェフの不等式を使わずに証明する。

両辺に 3 を掛けて

右辺＝$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{b(b+1)}+\frac{1}{c(c+1)}+\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{a(c+1)}+\frac{1}{b(a+1)}+\frac{1}{b(c+1)}$

$+\frac{1}{c(a+1)}+\frac{1}{c(b+1)}$　　　よって 右辺―左辺から

$$\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{a(c+1)}+\frac{1}{b(a+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}+\frac{1}{c(b+1)}-\frac{2}{a(a+1)}-\frac{2}{b(b+1)}-\frac{2}{c(c+1)}$$

<0・・・①　を示せばよい。この式を共通因数が出るよう 6 つの 2 式の差に分けて

$\frac{1}{b(a+1)}-\frac{1}{a(a+1)}=\frac{a-b}{ab(a+1)}$　　$\frac{1}{a(b+1)}-\frac{1}{b(b+1)}=\frac{b-a}{ab(b+1)}$　・・・②

$\frac{1}{c(b+1)}-\frac{1}{b(b+1)}=\frac{b-c}{bc(b+1)}$　　$\frac{1}{b(c+1)}-\frac{1}{c(c+1)}=\frac{c-b}{bc(c+1)}$　・・・③

$\frac{1}{a(c+1)}-\frac{1}{c(c+1)}=\frac{c-a}{ca(c+1)}$　　$\frac{1}{c(a+1)}-\frac{1}{a(c+1)}=\frac{a-c}{ca(a+1)}$　・・・④

②の 2 式より $-\frac{(a-b)^2}{ab(a+1)(b+1)}$ が 同様に③,④の 2 式から $-\frac{(b-c)^2}{bc(b+1)(c+1)}$

$-\frac{(c-a)^2}{ca(c+1)(a+1)}$　が出てくる。

従って　①式＝$-\left[\frac{(a-b)^2}{ab(a+1)(b+1)}+\frac{(b-c)^2}{bc(b+1)(c+1)}+\frac{(c-a)^2}{ca(c+1)(a+1)}\right]\leq 0$

で与えられた不等式が成立する。

(等号は　$a=b=c$ のとき)　　例えば　$a=b=c=k$　と置くと

与式左辺$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{k}\cdot\frac{3}{k+1}=\frac{3}{k(k+1)}$　右辺$=\frac{3}{k(k+1)}$　で成立する。

4.　a, b, c が実数で　$a+b+c=0,$　　$a^2+b^2+c^2=1$　のとき　$a^2b^2c^2 \leq \frac{1}{54}$

であることを証明せよ。

$(a+b+c)^2=0$ より　$1=a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$　$\therefore$　$ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$

再度自乗して　$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=\frac{1}{4}$　$\therefore$　$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{1}{4}$

a^2, b^2, c^2 を解とする 3 次方程式は $a^2b^2c^2 = k(>0)$ として（3 個の解とも≥ 0）

$t^3 - t^2 + \frac{1}{4}t - k = 0$ ・・・① 左辺を $f(t)$ と置いて

$f'(t) = 3t^2 - 2t + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(2t-1)(6t-1) = 0$ から グラフの増減は

t	・・・	$\frac{1}{6}$	・・・	$\frac{1}{2}$	
$f(t)$		$\frac{1}{54} - k$		$-k$	
$f(t)'$	増加	0	減少	0	増加

$f(t)$ が 2 個の極値を持つ条件は $-k(\frac{1}{54} - k) \leq 0$ $k \geq 0$ より $k \leq \frac{1}{54}$

従って $a^2b^2c^2 \leq \frac{1}{54}$ が成り立つ。

等号は $k = \frac{1}{54}$ のときで ①より $108t^3 - 108t^2 + 27t - 2 = 0$

この方程式は上表より $k = \frac{1}{54}$ のとき $f(t) = 0$ で $6t - 1$ を因数に持つから

割り算を実行して $(6t-1)(18t^2 - 15t + 2) = 0$ $(6t-1)^2(3t-2) = 0$

$t = \frac{1}{6}$（重解），$\frac{2}{3}$ よって $(a^2, b^2, c^2) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}), (\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$

$a + b + c = 0$ より

$$(a,b,c) = (\pm\frac{\sqrt{6}}{6}, \pm\frac{\sqrt{6}}{6}, \mp\frac{\sqrt{6}}{3}), (\pm\frac{\sqrt{6}}{6}, \mp\frac{\sqrt{6}}{3}, \pm\frac{\sqrt{6}}{6}), (\pm\frac{\sqrt{6}}{3}, \mp\frac{\sqrt{6}}{6}, \mp\frac{\sqrt{6}}{6})$$

（複号同順）のとき、等号が成立する。

5. $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$ $a, b, c > 0$ のとき

$$\frac{a}{b^2c^2} + \frac{b}{c^2a^2} + \frac{c}{a^2b^2} \geq \frac{9}{a+b+c}$$ を示せ。

左辺－右辺 を通分して 分母$= a^2b^2c^2(a+b+c) > 0$ であるから

分子$= (a+b+c)(a^3+b^3+c^3) - 9a^2b^2c^2$

$= a^4 + b^4 + c^4 + a(b^3+c^3) + b(c^3+a^3) + c(a^3+b^3) - 9a^2b^2c^2$

$= (a^2+b^2+c^2)^2 + bc(b^2+c^2) + ca(c^2+a^2) + ab(a^2+b^2) - 2(a^2b^2 +$

$+ b^2c^2 + a^2b^2) - 9a^2b^2c^2$ ここで条件式を使うと初項と末項が消える。

$= bc(b^2+c^2) + ca(c^2+a^2) + ab(a^2+b^2) - 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)$

$= bc(b^2 - 2bc + c^2) + ca(c^2 - 2ca + a^2) + ab(a^2 - 2ab + b^2)$

$= bc(b-c)^2 + ca(c-a)^2 + ab(a-b)^2 \geq 0$

等号は　$a=b=c=k>0$　として　$k^2+k^2+k^2=3k^3$ より　$k=1$ のとき

従って　与えられた不等式は成り立つ。(等号は $a=b=c=1$ のとき)

6. $a^2+b^2=1,\ \ a,b>0$　のとき

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{b}{a^2+1}+\frac{a}{b^2+1}\right) \geq \frac{8}{3}$$　を示せ。

両辺に 3 を掛けて左辺－右辺を作ると

$$3\cdot\frac{a+b}{ab}\cdot\frac{b(b^2+1)+a(a^2+1)}{(a^2+1)(b^2+1)}-8=\frac{3(a+b)^2(a^2-ab+b^2+1)-8ab(a^2+1)(b^2+1)}{ab(a^2+1)(b^2+1)}$$

分母>0 より、分子の符号を考えるとよい。$a^2+b^2=1$　を代入して

与式分子 $=3(1+2ab)(2-ab)-8ab(a^2b^2+2)=6-7ab-6a^2b^2-8a^3b^3$

$a^2+b^2=1$ だから　$a=\cos\theta, b=\sin\theta$ と置ける。$\sin 2\theta$ の式に直して

$=6-\frac{7}{2}\sin 2\theta-\frac{3}{2}\sin^2 2\theta-\sin^3 2\theta$　また　$\sin 2\theta=t$ として　変域は　$0<a<1$

$0<b<1$ から　$0<\theta<\frac{\pi}{2}$　　従って　$0<2\theta<\pi$ で　$0<t=\sin 2\theta<1$

$f(t)=6-\frac{7}{2}t-\frac{3}{2}t^2-t^3$　と　置いて　端点の値を調べる。

$f(0)=6$　　$f(1)=-1-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}+6=0$　従って　$f(t)$　は因数　$t-1$　を持つ。

$f(t)=(t-1)(-t^2-\frac{5}{2}t-6)=-\frac{1}{2}(t-1)(2t^2+5t+12)$

ここで $2t^2+5t+12=2(t^2+\frac{5}{2}t)+12=2(t+\frac{5}{4})^2+\frac{71}{8}>0$ であるから

$0<t<1$　では　$f(t)>0$　よって与式が成り立つ。(微分を使わずできた。)

等号は　$t=1$　より　$\theta=\frac{\pi}{4}$ で　$a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき 成立する。

以　上