私の数学散歩道（20）　平成 26 年 1 月 26 日提出

tanα=tan2αtan3αtan4α(角がこの順に A.P.をなす)
この式が成り立つ左辺の角α（0°＜α<90°）は？

数実研会員　村田　洋一

数研出版の 2013 入試問題集（数学Ⅰ・Ⅱ・A・B／理系）掲載の問題 152.

tan10°＝tan20° tan30° tan40°・・・①　　を示せ。（13 千葉大・理）

を見て何ときれいな式だろう。一つの正接の角が別の三つの正接の角の積で、しかも角がこの順に等差数列をなしています。　そこで角が 初項α，公差α の等差数列をなすこのほかに成り立つ角を探してみよう、というのが本稿の主旨です。尚、前回の数実研の席上今回の予告の積りで①を話したところ、発表後 時岡先生から別解をいただきました。

なかなか思いつかない解答で、本稿にも有用で各位の参考になると思い、先生の了解を得て掲載しました。

１．問題の証明

（小生の証明）ほぼ解答と同じ。 ①の右辺を tan10° で表す方針で　$\tan 10° = t$ として

$$\tan 20° = \tan(30° - 10°) = \frac{\tan 30° - \tan 10°}{1 + \tan 30° \tan 10°} = \frac{1 - \sqrt{3}t}{\sqrt{3} + t}$$

$$\tan 40° = \tan(30° + 10°) = \frac{1 + \sqrt{3}t}{\sqrt{3} - t} \qquad \therefore \quad \tan 30° = \tan(20° + 10°) = \frac{\tan 20° + t}{1 - t \tan 20°}$$

$$= \frac{\dfrac{2t}{1-t^2} + t}{1 - t \cdot \dfrac{2t}{1-t^2}} = \frac{2t + t(1-t^2)}{1 - t^2 - 2t^2} = \frac{t(3-t^2)}{1-3t^2} \quad \left(= \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \cdots (*)$$

$$右辺 = \frac{1-3t^2}{3-t^2} \cdot \frac{t(3-t^2)}{1-3t^2} = t = \tan 10° \qquad よって① が成り立つ。$$

(時岡先生の証明)

$$\cos A = \cos\frac{A}{3}\left(4\cos^2\frac{A}{3} - 3\right) = \cos\frac{A}{3}\left(2\cos\frac{2A}{3} - 1\right) = 2\cos\frac{A}{3}\left(\cos\frac{2A}{3} - \cos 60°\right)$$

$$= 2\cos\frac{A}{3}\left(-2\sin\left(\frac{A}{3} + 30°\right)\sin\left(\frac{A}{3} - 30°\right)\right) = 4\cos\frac{A}{3}\cos\left(60° - \frac{A}{3}\right)\cos\left(\frac{A}{3} + 60°\right)$$

$$= 4\cos\frac{A}{3}\cos\left(60° + \frac{A}{3}\right)\cos\left(60° - \frac{A}{3}\right)$$

同様に　$\sin A = \sin\frac{A}{3}(3-4\sin^2\frac{A}{3}) = \sin\frac{A}{3}(1+2\cos\frac{2A}{3}) = 2\sin\frac{A}{3}(\cos\frac{2A}{3}+\cos 60°)$

$$= 4\sin\frac{A}{3}\cos(\frac{A}{3}+30°)\cos(\frac{A}{3}-30°)) = -4\sin\frac{A}{3}\sin(\frac{A}{3}-60)\sin(\frac{A}{3}+60°)$$

$$= 4\sin\frac{A}{3}\sin(60°+\frac{A}{3})\sin(60°-\frac{A}{3})$$

従って　公式　$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \tan\frac{A}{3}\tan(60°-\frac{A}{3})\tan(60°+\frac{A}{3})$　を得る。

ここで $A = 30°$ として　$\tan 30° = \tan 10°\tan 50°\tan 70° = \tan 10°\cdot\frac{1}{\tan 40°}\cdot\frac{1}{\tan 20°}$

これから　$\tan 10° = \tan 20°\tan 30°\tan 40°$　となり、①が証明された。

また これとほぼ同様の考え方で解ける 時岡先生のホームページ　趣味の数学問題集 B-82 掲載の解答の公式を ②とする。(上の公式で $A = 3\theta$ とすると容易。)

$$\tan\theta = \tan 3\theta\tan(30°-\theta)\tan(30°+\theta) \quad ・・・②$$

２．条件を満たす方程式を作り それを解く

方程式は　$\tan\alpha = \tan 2\alpha\tan 3\alpha\tan 4\alpha$ ($0° < \alpha < 90°$)・・・③　で $\tan\alpha = k$ として

$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2k}{1-k^2}$　　$\tan 3\alpha = \frac{\tan\alpha+\tan 2\alpha}{1-\tan\alpha\tan 2\alpha} = \frac{k(3-k^2)}{1-3k^2}$

$\tan 4\alpha = \frac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} = \frac{4k(1-k^2)}{k^4-6k^2+1}$　　・・・④　　$k \neq \pm 1,\quad k \neq \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

③と④から　$8k^3(3-k^2) = k(1-3k^2)(k^4-6k^2+1)$　　$\alpha \neq 0$ より $k \neq 0$

展開して整理すると　　$3k^6 - 27k^4 + 33k^2 - 1 = 0$　　・・・⑤

一方　$\alpha = 10°$ として　$\tan 3\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$　$\therefore \frac{k(3-k^2)}{1-3k^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$　・・・⑥　が成立する。

$1-3k^2 = \sqrt{3}k(3-k^2)$　として両辺を平方、整理すると⑤が得られるが ⑥を整理した $\sqrt{3}k^3 - 3k^2 - 3\sqrt{3}k + 1 = 0$ ・・・⑦　を解くだけで十分である。(cf. 注))

⑦ の左辺を $f(k)$ とすると　$f'(k) = 3(\sqrt{3}k+1)(k-\sqrt{3}) = 0$　から

$k = \sqrt{3}$ で極小値 -8、$k = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ で極大値 $\frac{8}{3}$ をとる。

$f(k) = 0$ の解は　$f(-2) = -(2\sqrt{3}+11) < 0$,　$f(-1) = 2(\sqrt{3}-1) > 0$

$f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -2(\sqrt{3}+1) < 0$, $f(2) = 2\sqrt{3}-11) < 0$,　$f(3) = 2(9\sqrt{3}-13) > 0$

から　$-2 < k_1 < -1$,　$0 < k_2 < 1$,　$2 < k_3 < 3$　(但し $k_1 < k_2 < k_3$)

即ち $f(k)=0$ は 3 個の実数解を持つ。（下記議論で $D<0$ のとき）

では ⑦を解いてみよう。以下、k を x に置き換えて考える。

⑦は 相異なる 3 個の実数解を持つが､因数分解できそうにないから下記の公式を用いる。

（マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック　p．32）

3 次方程式： $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ の解

$$\mathrm{Q}=\frac{3a_2-a_1^{\ 2}}{9},\ \mathrm{R}=\frac{9a_1a_2-27a_3-2a_1^{\ 3}}{54},\ \mathrm{S}=\sqrt[3]{R+\sqrt{Q^3+R^2}},\ \mathrm{T}=\sqrt[3]{R-\sqrt{Q^3+R^2}}$$

とすると　各々の解は　$x_1=S+T-\frac{1}{3}a_1$　　$x_2=-\frac{1}{2}(S+T)-\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T)$

$$x_3=-\frac{1}{2}(S+T)-\frac{1}{3}a_1-\frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T)$$

a_1,a_2,a_3 が実数で $D=Q^3+R^2$ が判別式のとき

1） $D>0$ ならば 1 つの実根、2 つの複素共役根

2） $D=0$ ならばすべて実根で、少なくとも 2 根は等しい

3） $D<0$ ならばすべて相異なる実根で､このときは三角法で計算が簡約化される。

$D<0$ のときの解　　$x_1=2\sqrt{-Q}\cos\frac{\theta}{3}-\frac{1}{3}a_1$　　$x_2=2\sqrt{-Q}\cos(\frac{\theta}{3}+120°)-\frac{1}{3}a_1$

$x_3=2\sqrt{-Q}\cos(\frac{\theta}{3}+240°)-\frac{1}{3}a_1$　　ここで $\cos\theta=R/\sqrt{-Q^3}$

$x_1+x_2+x_3=-a_1$　　$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=a_2$　　$x_1x_2x_3=-a_3$

⑦ で $a_1=-\sqrt{3}$，$a_2=-3$，$a_3=\frac{1}{\sqrt{3}}$　$Q=\frac{-9-3}{9}=-\frac{4}{3}$　$R=\frac{9-3+2}{18}\cdot\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$

$D=-\frac{64}{27}+\frac{48}{81}=-\frac{16}{9}<0$ より　$\cos\theta=\frac{4\sqrt{3}}{9}\times\frac{3\sqrt{3}}{8}=\frac{1}{2}$　$\theta=60°$

計算の途中から三角関数表を使用して

$$x_1=2\sqrt{\frac{4}{3}}\cos 20°+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}(4\cos 20°+1)=\frac{1.73205}{3}(4\times 0.9397+1)=2.7474$$

$=k_3\fallingdotseq\tan 70°$ これから　$\alpha=70°$ と推定される。

$$x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}(4\cos 140°+1)=\frac{\sqrt{3}}{3}(1-4\cos 40°)=\frac{\sqrt{3}}{3}\times(-2.064)=-1.1918=k_1$$

$\fallingdotseq\tan(-50°)=-\tan 50°$　　従って $\alpha=50°$ と思われる。

$$x_3=\frac{\sqrt{3}}{3}(4\cos 260°+1)=\frac{\sqrt{3}}{3}(1-4\cos 80°)=\frac{1.73205}{3}\times 0.3056=0.1764=k_2$$

最後の解からは　$\alpha=10°$ が出てきてこれらは $k_1<k_2<k_3$ を満足する。

3. 出てきた解を吟味する

x_1 で $\alpha = 70°$ が解と仮定して ③より　$\tan 70° = \tan 140° \tan 210° \tan 280°$
$= (-\tan 40°)\tan 30°(-\tan 80°) = \tan 30° \tan 40° \tan 80°$
一方　② より　$\tan 70° = \tan 210°(-\tan 40°)\tan 100° = \tan 30° \tan 40 \tan 80°$ で
右辺が一致するから　$\alpha = 70°$　　　同様に x_2 で $\alpha = 50°$ と仮定して
③より　$\tan 50° = \tan 100° \tan 150° \tan 200° = (-\tan 80°)(-\tan 30°)\tan 20°$
②より　$\tan 50° = \tan 150°(-\tan 20°)\tan 80° = (-\tan 30°)(-\tan 20°)\tan 80°$
何れも右辺が $\tan 20° \tan 30° \tan 80°$ で一致するから $\alpha = 50°$
　$\alpha = 10°$ のときは 1.問題の証明 の（＊）より成り立つ。
従って これらの議論から方程式③を満たす α は 10° のほか 50°, 70° となる。

４．終わりに

　方程式⑦ の解は $\tan 70°, -\tan 50°, \tan 10°$ であるから 解と係数の関係から
$\tan 70° - \tan 50° + \tan 10° = \sqrt{3}$　（1.732）
$-\tan 70° \tan 50° - \tan 50° \tan 10° + \tan 10° \tan 70° = -3$　（-3.0002）
$\tan 70°(-\tan 50°)\tan 10° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　（-0.5773）　と無理数や整数になります。
～(　　）表示は三角関数表を使用しての計算値～
　これらを解と係数の関係及び三角関数表を使わず、代数的に上記の式各々を証明できたら素晴らしいと考えますが、循環論法に陥り無理でしょうね。
　最後に、3 個の相異なる正接を解に持つ 3 次方程式の係数が平方根までしか含まないことに驚きました。もう少し複雑な体を含むかと思っていましたが・・・。

以　上

注）三角方程式の一般解より $\tan 3\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときは $3\alpha = -30° + 180 \times n$（$n$ は整数)、
　これから $\alpha = -70°, -10°, 50°$; $\tan 3\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときも同様に解けるが、②の公式を活かしたく、敢えて⑦を 3 次方程式の公式より解き 解を検証したものです。

[参考文献]
1．R. Spiegel 著　氏家勝巳 訳
　マグロウヒル　「数学公式・数表ハンドブック」　オーム社
2.　時岡　郁夫
　・インタネット　趣味の数学問題集　第 2 版　問題 B-82 と解答
　・第 87 回 数実研の席上 受領の①の別解記載資料