私の数学散歩道(19)　 平成 25 年 12 月 2 日提出

「4 次関数に放物線(形状)が現れた」・・の検討について

数実研会員　村田　洋一

今回は問題提起 2 問：(1) $(x-1)^n - x^n$ （但し、$n = 5,6,8$) を整係数の範囲で因数分解しそこから出てくる既約な 4 次関数の特徴、 (2) $\int \sqrt{\dfrac{b'x+a'}{bx+a}}dx$ （ピアース ／フォスター「簡約積分表」 公式 113, 公式 115 を連結し一個の積分としたものの証明) を取り上げ、各々検討し課題を提示してみました。

当方が気付かない点をご指摘いただければ幸いです。

問題の提示

（第 1 問）次の関数を整係数の範囲で因数分解し、既約の因数として出てくる 4 次関数のグラフの形状を理由を付して述べよ。

(1) $(x-1)^5 - x^5$

(2) $(x-1)^6 - x^6$

(3) $(x-1)^8 - x^8$

（第 2 問）次の積分公式を証明せよ。

$$\int \sqrt{\frac{b'x+a'}{bx+a}}dx = \frac{1}{b}\sqrt{(bx+a)(b'x+a')} - \frac{ab'-a'b}{b\sqrt{bb'}}\log(\sqrt{b'(bx+a)} + \sqrt{b(b'x+a')})$$

（但し $a<0$，$b>0$，$b'>0$）

解答例

（第 1 問）

検討

解）(1)　$n=5$　の時　パスカルの三角形から

$$(x-1)^5 - x^5 = -(5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1) \quad ・・・①$$

この式の右辺を $f(x)$ とおいて

$$f'(x) = -(20x^3 - 30x^2 + 20x - 5) = -5(2x-1)(2x^2 - 2x + 1)$$

ここで $2x^2 - 2x - 1$ は既約で常に正より

増減は左の通り。極大値は $-1/16$ （$x = 1/2$）

x	・・・	$1/2$	・・・
$f(x)$	(+)	$-1/16$	(−)
$f'(x)$	増加	0	減少

$f(x)$ は　$x=\dfrac{1}{2}$ を軸に放物線状の曲線を描くようである。　（例えば $f(0)=f(1)=-1$）

いま $f(\dfrac{1}{2}+k)$、$f(\dfrac{1}{2}-k)$ を計算してみると

$$f(\frac{1}{2}+k)=-5(k+\frac{1}{2})^4+10(k+\frac{1}{2})^3-10(k+\frac{1}{2})^2+5(k+\frac{1}{2})-1=-5k^4-\frac{5}{2}k^2-\frac{1}{16}$$

$=-\dfrac{1}{16}(80k^4+40k^2+1)$　同様に　$f(\dfrac{1}{2}-k)=-\dfrac{1}{16}(80k^4+40k^2+1)$

従って　$f(\dfrac{1}{2}+k)=f(\dfrac{1}{2}-k)$ から $f(x)$ は　$x=\dfrac{1}{2}$ を軸とする上に凸な放物線状の曲線となり、x 軸との交点を持たないから既約である。これから①が求めるものである。

(2) $n=6$　の時

$(x-1)^6-x^6=\{(x-1)^3-x^3\}\{(x-1)^3+x^3\}=-(2x^3-3x^2+3x-1)(3x^2-3x+1)$

$=-(2x-1)(x^2-x+1)(3x^2-3x+1)$ ・・・②

$3x^2-3x+1$　と　x^2-x+1 は既約であり②が求めるもの。

(3) $n=8$ の時

$(x-1)^8-x^8=\{(x-1)^4-x^4\}\{(x-1)^4+x^4\}=-(2x^4-4x^3+6x^2-4x+1)(4x^3-6x^2+4x-1)$

$=-(2x-1)(2x^2-2x+1)(2x^4-4x^3+6x^2-4x+1)$ ・・・③

ここで $g(x)=2x^4-4x^3+6x^2-4x+1$ とおくと

$g'(x)=4(2x^3-3x^2+3x-1)=4(2x-1)(x^2-x+1)$

ここで x^2-x+1 は既約で常に正より

$g(x)$ の増減は左の通り。極小値は1/8（$x=1/2$）

①と同様に

x	・・・	1/2	・・・
$g(x)$	(—)	1/8	(＋)
$g'(x)$	減少	0	増加

$g(\dfrac{1}{2}+k)=g(\dfrac{1}{2}-k)=2k^4+3k^2+\dfrac{1}{8}$ が成立つ。①同様 $x=\dfrac{1}{2}$ を軸とする下に凸な放物線状の曲線となり x 軸との交点を持たないから既約で ③が求めるものである。

以上のことから　①〜③が答となる。（勿論①、③は放物線の定義になじまない。）

注）4 次関数で w 及びその変形のグラフはよく見るが、放物線状の形は今回初めて知った。

<u>課題</u>　$n=1$〜4　の場合は言うまでもない。　$n=7$ の時はパスカルの三角形から

$(x-1)^7-x^7=-(7x^6-21x^5+35x^4-35x^3+21x^2-7x+1)$ となる。右辺を $h(x)$ とすると

$h''(x)$ ＝$-42(5x^4-10x^3+10x^2-5x+1)$　で $n=5$　の時と同じ因数が出てくるのが興味深い。$h(x)$ が因数分解ができるかどうか不明、うまい整式の既約判定法をご教示願えれば幸いです。

（第 2 問）次の積分公式を証明せよ。

$$I=\int\sqrt{\frac{b'x+a'}{bx+a}}dx=\frac{1}{b}\sqrt{(bx+a)(b'x+a')}-\frac{ab'-a'b}{b\sqrt{bb'}}\log(\sqrt{b'(bx+a)}+\sqrt{b(b'x+a')})$$

（但し $a<0$，$b>0$，$b'>0$）

検討

解）公式に従い二段階で示す。

$$I_1=\int\sqrt{\frac{b'x+a'}{bx+a}}dx=\frac{1}{b}\sqrt{(bx+a)(b'x+a')}-\frac{ab'-a'b}{2b}\int\frac{dx}{\sqrt{(bx+a)(b'x+a')}}\quad\cdot\cdot\cdot①$$

$$I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{(bx+a)(b'x+a')}}=\frac{2}{\sqrt{bb'}}\log(\sqrt{bb'(bx+a)}+b\sqrt{b'x+a'})\quad\cdot\cdot\cdot②$$

①(公式 113)は、被積分関数に着目して

$$\sqrt{\frac{b'x+a'}{bx+a}}=\frac{b'x+a'}{\sqrt{(bx+a)(b'x+a')}}=\frac{2bb'x+2a'b}{2b\sqrt{(bx+a)(b'x+a')}}$$

$$=\frac{2bb'x+a'b+ab'+a'b-ab'}{2b\sqrt{(bx+a)(b'x+a')}}=\frac{2bb'x+a'b+ab'}{2b}\cdot\frac{1}{\sqrt{(bx+a)(b'x+a')}}$$

$$-\frac{ab'-a'b}{2b}\cdot\frac{1}{\sqrt{(bx+a)(b'x+a')}}=\left\{\frac{1}{b}\sqrt{(bx+a)(b'x+a')}-\frac{ab'-a'b}{2b}\right.$$

$$\left.\times\int\frac{dx}{\sqrt{(bx+a)(b'x+a')}}\right\}'$$ 従って①が成り立つ。

②(公式 115)は右辺を微分して

$$\frac{2}{\sqrt{bb'}}\left\{log(\sqrt{bb'(bx+a)}+b\sqrt{b'x+a'})\right\}'=\frac{2}{\sqrt{bb'}}\cdot\frac{\dfrac{b^2b'}{2\sqrt{bb'(bx+a)}}+\dfrac{bb'}{2\sqrt{b'x+a'}}}{\sqrt{bb'(bx+a)}+b\sqrt{b'x+a'}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{bb'}}\cdot\frac{\dfrac{bb'(\sqrt{bb'(bx+a)}+b\sqrt{b'x+a'})}{2\sqrt{bb'(bx+a)}\sqrt{b'x+a'}}}{\sqrt{bb'(bx+a)}+b\sqrt{b'x+a'}}=\frac{2}{\sqrt{bb'}}\cdot\frac{bb'}{2\sqrt{bb'(bx+a)}\sqrt{b'x+a'}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(bx+a)(b'x+a')}}$$ これから②が成り立つ。　①，②より

$$\int\sqrt{\frac{b'x+a'}{bx+a}}dx=\frac{1}{b}\sqrt{(bx+a)(b'x+a')}-\frac{ab'-a'b}{b\sqrt{bb'}}\log(\sqrt{bb'(bx+a)}+b\sqrt{b'x+a'})$$

ここで　第２項＝$-\dfrac{ab'-a'b}{b\sqrt{bb'}}\left\{log\sqrt{b}+\log(\sqrt{b'(bx+a)}+\sqrt{b(b'x+a')})\right\}$

$$=-\frac{ab'-a'b}{b\sqrt{bb'}}\log(\sqrt{b'(bx+a)}+\sqrt{b(b'x+a')})-\frac{(ab'-a'b)\log b}{2b\sqrt{bb'}}$$

定数を除き、第１項と合わせ右辺が一致、一応証明された。

しかし、①は微分を逆に追ったもので,かつ式変形が技巧的でなかなか思いつくものではない。 ②は微分そのもので面白みがない。正攻法がないものか考えてみた。

結局 部分積分ではうまく行かず試行錯誤の結果、下記の置換積分による解法となった。

$y=\sqrt{\dfrac{b'x+a'}{bx+a}}$ とおく。　$y^2(bx+a)=b'x+a'$　$x=\dfrac{a'-ay^2}{by^2-b'}$　$dx=\dfrac{2(ab'-a'b)y}{(by^2-b')^2}dy$

$$I=2(ab'-a'b)\int\frac{y^2}{(by^2-b')^2}dy(*)=2(ab'-a'b)\left\{\frac{-y}{2b(by^2-b')}+\frac{1}{2b}\int\frac{dy}{by^2-b'}\right\}$$

$$=\frac{-(ab'-a'b)y}{b(by^2-b')}+\frac{ab'-a'b}{b}\int\frac{dy}{by^2-b'}(**)$$

$$=\frac{-(ab'-a'b)y}{b(by^2-b')}+\frac{ab'-a'b}{2b\sqrt{bb'}}\log\left|\frac{b'-y\sqrt{bb'}}{b'+y\sqrt{bb'}}\right|$$

（＊）、（＊＊）　公式 51、59（p.5 の注を参照）

$y=\sqrt{\dfrac{b'x+a'}{bx+a}}$ を代入して　I の第１項＝$-\dfrac{(ab'-a'b)\cdot\sqrt{\dfrac{b'x+a'}{bx+a}}}{b^2\cdot\dfrac{b'x+a'}{bx+a}-bb'}$

$$=-\frac{(ab'-a'b)\cdot\sqrt{(bx+a)(b'x+a')}}{b^2(b'x+a')-bb'(bx+a)}=\frac{\sqrt{(bx+a)(b'x+a')}}{b}$$

I の第２項＝$\dfrac{ab'-a'b}{2b\sqrt{bb'}}\log\left|\dfrac{b'-\sqrt{bb'}\cdot\sqrt{\dfrac{b'x+a'}{bx+a}}}{\sqrt{bb'}\cdot\sqrt{\dfrac{b'x+a'}{bx+a}}+b'}\right|=\dfrac{ab'-a'b}{2b\sqrt{bb'}}$

$$\times\log\left|\frac{b'\sqrt{bx+a}-\sqrt{bb'(b'x+a')}}{\sqrt{bb'(b'x+a')}+b'\sqrt{bx+a}}\right|=\frac{ab'-a'b}{2b\sqrt{bb'}}\log\left|\frac{\sqrt{b'(bx+a)}-\sqrt{b(b'x+a')}}{\sqrt{b'(bx+a)}+\sqrt{b(b'x+a')}}\right|$$

$$= -\frac{ab'-a'b}{2b\sqrt{bb'}}\log\left|\frac{\sqrt{b'(bx+a)}+\sqrt{b(b'x+a')}}{\sqrt{b'(bx+a)}-\sqrt{b(b'x+a')}}\right|$$ （真数を逆数に→係数マイナスに）

$$= -\frac{ab'-a'b}{2b\sqrt{bb'}}\log\left|\frac{(\sqrt{b'(bx+a)}+\sqrt{b(b'x+a')})^2}{b'(bx+a)-b(b'x+a')}\right|$$

$$= -\frac{ab'-a'b}{2b\sqrt{bb'}}\left\{2\log(\sqrt{b'(bx+a)}+\sqrt{b(b'x+a')})-\log(ab'-a'b)\right\}$$

$$= -\frac{ab'-a'b}{b\sqrt{bb'}}\log(\sqrt{b'(bx+a)}+\sqrt{b(b'x+a')})+\frac{ab'-a'b}{2b\sqrt{bb'}}\log(ab'-a'b)$$

第２項の結果から定数を除いて第１項と合わせると

$$I=\int\sqrt{\frac{b'x+a'}{bx+a}}dx=\frac{1}{b}\sqrt{(bx+a)(b'x+a')}-\frac{ab'-a'b}{b\sqrt{bb'}}\log(\sqrt{b'(bx+a)}+\sqrt{b(b'x+a')})$$

で 同じ答えが得られた。

課題

ほかに別解やもっと簡単な解法があるでしょうか？

注）

１．公式 59 で$m=1$の時）の証明（＊）

$$I=\int\frac{y^2}{(by^2-b')^2}dy=\frac{-y}{2b(by^2-b')}+\frac{1}{2b}\int\frac{dy}{by^2-b'}$$

被積分関数を部分分数分解して

$$\frac{y^2}{(by^2-b')^2}=\frac{k}{by^2-b'}-\frac{l}{(by^2-b')^2}$$ とおく。 右辺分子$=bky^2-(b'k+l)$

未定係数法で $bk=1$ $b'k+l=0$ から $k=\frac{1}{b}$ $l=-\frac{b'}{b}$

$$I=\frac{1}{b}\int\frac{dy}{by^2-b'}+\frac{b'}{b}\int\frac{dy}{(by^2-b')^2}=\frac{1}{b}\int\frac{dy}{by^2-b'}+\frac{b'}{b}\left\{\frac{-y}{2b'(by^2-b')}-\frac{1}{2b'}\int\frac{dy}{by^2-b'}\right\}$$

$$=\frac{-y}{2b(by^2-b')}+\frac{1}{2b}\int\frac{dy}{by^2-b'}$$

２．公式 51 の証明（＊＊）

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\log\left| \frac{a+x\sqrt{-ab}}{a-x\sqrt{-ab}} \right|$$ より　$a=-b'$　$x=y$ と見て

$$\int \frac{dy}{by^2-b'} = \frac{1}{2\sqrt{bb'}}\log\left| \frac{-b'+y\sqrt{bb'}}{-b'-y\sqrt{bb'}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{bb'}}\log\left| \frac{b'-y\sqrt{bb'}}{b'+y\sqrt{bb'}} \right|$$

$$\frac{1}{by^2-b'} = \frac{A}{\sqrt{b}y-\sqrt{b'}} - \frac{B}{\sqrt{b}y+\sqrt{b'}}$$ として未定係数法で A,B を定めると

$$A=B=\frac{1}{\sqrt{b'}} \qquad \therefore \quad \int \frac{dy}{by^2-b'} = \frac{1}{2\sqrt{bb'}}\left\{ \int \frac{\sqrt{b}dy}{\sqrt{b}y-\sqrt{b'}}dy - \int \frac{\sqrt{b}dy}{\sqrt{b}y+\sqrt{b'}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{bb'}}\log\left| \frac{\sqrt{b}y-\sqrt{b'}}{\sqrt{b}y+\sqrt{b'}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{bb'}}\log\left| \frac{b'-y\sqrt{bb'}}{b'+y\sqrt{bb'}} \right|$$

３．本問は a,b 等の正負により場合分けが必要であるが、煩雑さを避けるため真数や根号内が正という前提で解答を進めた。

ここでは $bb'>0$，$-ab>0$，$b>0$ から $a<0$，$b>0$，$b'>0$ となる。

例えば　$a'=b'=b=1$，$a=-1$ として公式に当てはめると

$$I = \int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx = \sqrt{(x-1)(x+1)} + 2\log(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})$$

$$= \sqrt{x^2-1} + \log 2(x+\sqrt{x^2-1}) = \sqrt{x^2-1} + \log(x+\sqrt{x^2-1}) + \log 2$$

以 上

[参考文献]

・B. O. ピアーズ 著　R. M. フォスター 改訂

理工学海外名著シリーズ６　　ブレイン図書出版（株）　「簡約積分表」