私の数学散歩道(18)　　2013 年 8 月 4 日提出

自作による雑問題 5 問とその解答について(2)

数実研会員　村田　洋一

今回は自作による三角関数の証明問題 2 題、図形の面積と積分計算の 2 題、図形絡みの微分と整数についての 1 題の計 5 題について問題と解答を作ってみました。

(第 1 問)の垂線の長さは公式からすぐ出ますが、式の変形で迷いそうです。また別解も面白そうです。(第 2 問)は複雑な式に惑わず、置換えや式の扱いに注意が必要です。

(第 3 問)は 3 次関数の性質と定数α, βの大小関係がポイントです。

(第 4 問)は直接計算するのが面倒で簡単な積分を求め足掛かりにするのが大切、(第 5 問)の(2)は整数解絡みで少し考えさせられます。でははじめましょう。

問題の一覧

（第 1 問）点 $A(a, a\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}))$から直線 $y = x\tan\theta$ に引いた垂線の足をH とする。

AH 間の距離 l はθ に無関係な定数であることを証明せよ。

但し、a は定数で $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ とする。

（第 2 問）　次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{\sin\theta\cos\theta - 2\sin^3\theta\cos\theta}{8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1} = \frac{\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 6\tan^2\theta + \tan^4\theta} \quad \cdots (*)$$

（第 3 問）　$f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)$ （α, β は実数）と x 軸で囲まれた面積が $\frac{27}{4}$ であるという。β を α で表わせ。

（第 4 問）次の積分を求めよ。　$J = \int e^{2x}\sin^2 x dx$　　$K = \int e^{2x}\cos^2 x dx$

（第 5 問）　(1) 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上に点 $P(x_1, y_1)$ をとる。P より x 軸、y 軸に垂線をおろしその足をそれぞれQ, R とする。長方形 $PQOR$ の面積を最大にするP の座標とその時の面積 S を a, b で表わせ。

(2)　(1)の面積 S が 1 になるという。このとき $(a, b) = (2,1)$ に限ることを示せ。

解答例

（第１問）点 $A(a, a\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}))$ ）から直線 $y = x\tan\theta$ に引いた垂線の足を H とする。

AH 間の距離 l は θ に無関係な定数であることを証明せよ。

但し、a は定数で $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ とする。

解）公式より点 A から直線 $x\tan\theta - y = 0$ までの垂線の長さ l は $(\because \cos\theta > 0)$

$$l = \frac{\left|a\tan\theta - a\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})\right|}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{a\left|\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})\right|}{\frac{1}{\cos\theta}} = a\left|\ \sin\theta - \cos\theta\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})\right|$$

ここで $\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}) = \dfrac{1+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}} = \dfrac{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}} = \dfrac{(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2})^2}{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}} = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

これから $l = a\left|\sin\theta - \cos\theta \cdot \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right| = a\left|\sin\theta - (1+\sin\theta)\right| = a$ で定数となる。

別解）　上と同様に l を $f(\theta)$ とおくと

$f(\theta) = a\cos\theta\left\{\ \tan\theta - \tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})\right\}$　$0<\theta<\frac{\pi}{4}$ より　$1<\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})<\tan\frac{3}{8}\pi$

また $0<\tan\theta<1$ から　$\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}) > \tan\theta$　$\therefore f(\theta) = a\left\{cos\theta\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}) - \sin\theta\right\}$

$f(\theta)$ が定数であるから　$f'(\theta) = 0$ であればよい。

$$f'(\theta) = \left\{\ -\sin\theta\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}) + \frac{\cos\theta}{2\cos^2(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})} - \cos\theta\right\}a = \left\{\ \frac{-\sin\theta\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})}{\cos^2(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})}\right.$$

$$\left. + \frac{\cos\theta}{2\cos^2(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})} - \cos\theta\right\}a = \left\{\ \frac{-\sin\theta\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) + \cos\theta}{2\cos^2(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})} - \cos\theta\right\}a$$

$$= \left\{\ \frac{\cos\theta(1-\sin\theta)}{1+\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)} - \cos\theta\ \right\}a = \left\{\cos\theta - \cos\theta\right\}a = 0$$

となるから l は定数である。

（第 2 問）　次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{\sin\theta\cos\theta - 2\sin^3\theta\cos\theta}{8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1} = \frac{\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 6\tan^2\theta + \tan^4\theta} \quad ・・・(*)$$

解）$x = \cos\theta, y = \sin\theta$　とおくと　$x^2 + y^2 = 1$　・・・①

$$(*)の右辺 = \frac{\frac{y}{x} - \frac{y^3}{x^3}}{1 - \frac{6y^2}{x^2} + \frac{y^4}{x^4}} = \frac{x^3y - xy^3}{x^4 - 6x^2y^2 + y^4} = \frac{xy(x^2 - y^2)}{1 - 8x^2y^2}$$

$(\because x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 1 - 2x^2y^2)$

従って　$\dfrac{xy(1-2y^2)}{8x^4 - 8x^2 + 1} = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{1 - 8x^2y^2}$　　即ち $P = xy\{(1-2y^2)(1-8x^2y^2)$

$-(8x^4 - 8x^2 + 1)(x^2 - y^2)\} = 0$　を示せばよい。

$P = xy\{(1 - 8x^2y^2 - 2y^2 + 16x^2y^4) - (8x^6 - 8x^4 + x^2 - 8x^4y^2 + 8x^2y^2 - y^2)\}$

$= xy\{(1 - (x^2 + y^2) - 16x^2y^2 + 16x^2y^4 + 8x^4y^2 - 8x^6 + 8x^4\}$

$= 8xy\{-x^6 + x^4 + x^4y^2 - 2x^2y^2(1 - y^2)\}$　　（∵ ①より）

$= 8xy\{-x^6 + x^4 + x^4(1 - x^2) - 2x^4(1 - x^2)\} = 0$　従って与式（*）が成立する。

（第 3 問）　$f(x) = (x - \alpha)^2(x - \beta)$（$\alpha, \beta$ は実数）と x 軸で囲まれた面積が $\dfrac{27}{4}$ で

あるという。β を α で表わせ。

解）α, β の大小によって分ける。面積を S とすると

・$\alpha > \beta$ のとき　図-1 で　$S = \int_\beta^\alpha f(x)dx$

・$\alpha < \beta$ のとき　図-2 で　$S = -\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\beta^\alpha f(x)dx$

・$\alpha = \beta$ のとき、S は定まらない。(単調増加関数)

従って図-1 で S を α, β で表わすことを考える。

$$S = \int_\beta^\alpha (x-\alpha)^2(x-\beta)dx = \int_\beta^\alpha \{x^3 - (2\alpha+\beta)x^2 + (\alpha^2 + 2\alpha\beta)x - \alpha^2\beta\}dx$$

$$\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2\alpha+\beta}{3}x^3 + \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta}{2}x^2 - \alpha^2\beta x\right]_\beta^\alpha = \frac{1}{4}(\alpha^4 - \beta^4) - \frac{2\alpha+\beta}{3}(\alpha^3 - \beta^3)$$

$$+\frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta}{2}(\alpha^2 - \beta^2) - \alpha^2\beta(\alpha - \beta) = \frac{\alpha - \beta}{12}\{3(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2) - 4(2\alpha+\beta)$$

$\times(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+6(\alpha^2+2\alpha\beta)(\alpha+\beta)-12\alpha^2\beta\}$

$=\dfrac{\alpha-\beta}{12}\{(\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3\}=\dfrac{1}{12}(\alpha-\beta)^4$

題意から　$\dfrac{1}{12}(\alpha-\beta)^4=\dfrac{27}{4}$　α,β は実数であるから　$(\alpha-\beta)^2=9$

よって　$\beta=\alpha\pm 3$　$\alpha>\beta$ のとき　$\beta=\alpha-3$

$\alpha<\beta$ のとき　$\beta=\alpha+3$

（第4問）次の積分を求めよ。　$J=\int e^{2x}\sin^2 xdx$　$K=\int e^{2x}\cos^2 xdx$

解）$J=\int e^{2x}\sin^2 xdx=\dfrac{1}{2}e^{2x}\sin^2 x-\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{2}e^{2x}\sin 2x-\int e^{2x}\cos 2xd\,x\right\}$

$=\dfrac{1}{2}e^{2x}\sin^2 x-\dfrac{1}{4}e^{2x}\sin 2x+\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{2}e^{2x}\cos 2x+\int e^{2x}\sin 2xd\,x\right\}$

$=\dfrac{1}{2}e^{2x}\sin^2 x+\dfrac{1}{4}e^{2x}(\cos 2x-\sin 2x)+\dfrac{1}{2}\int e^{2x}\sin 2xdx$　・・・①

$J=\dfrac{1}{2}e^{2x}\sin^2 x-\dfrac{1}{2}\int e^{2x}\sin 2xdx$　より　$\int e^{2x}\sin 2xdx=I$　として

$\dfrac{1}{2}e^{2x}\sin^2 x-\dfrac{1}{2}I=\dfrac{1}{2}e^{2x}\sin^2 x+\dfrac{1}{4}e^{2x}(\cos 2x-\sin 2x)+\dfrac{1}{2}I$

これから　$I=\dfrac{1}{4}e^{2x}(\sin 2x-\cos 2x)$　・・・②　　②と①より

$J=\dfrac{1}{2}e^{2x}\sin^2 x-\dfrac{1}{8}e^{2x}(\sin 2x-\cos 2x)=\dfrac{1}{8}e^{2x}\{2\sin x(\sin x-\cos x)+1\}$

また　$J+K=\int e^{2x}\sin^2 xdx+\int e^{2x}\cos^2 xdx=\int e^{2x}dx=\dfrac{1}{2}e^{2x}$ だから

$K=\dfrac{1}{2}e^{2x}-J=\dfrac{1}{8}e^{2x}(-2\sin^2 x+2\sin x\cos x+3)=\dfrac{1}{8}e^{2x}\{2\cos x(\sin x+\cos x)+1\}$

以上のことから

$J=\dfrac{1}{8}e^{2x}\{2\sin x(\sin x-\cos x)+1\}+C_1$

$K=\dfrac{1}{8}e^{2x}\{2\cos x(\sin x+\cos x)+1\}+C_2$　が求める不定積分である。

（第 5 問）(1) 楕円　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の第 1 象限上に点 $P(x_1,y_1)$ をとる。P より x 軸、y 軸に垂線をおろしその足をそれぞれ Q,R とする。長方形 $PQOR$ の面積を最大にする P の座標とその時の面積 S を a,b で表わせ。

(2)　(1)の面積 S が 1 になるという。このとき $(a,b)=(2,1)$ に限ることを示せ。

解）(1)　$P(x_1,y_1)$ を第一象限にとっても、また a,b を正としても一般性を失わない。

$\dfrac{{x_1}^2}{a^2}+\dfrac{{y_1}^2}{b^2}=1$ より $y_1=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-{x_1}^2}$，$y_1{}'=-\dfrac{bx_1}{a\sqrt{a^2-{x_1}^2}}$ また $S(x_1)=\dfrac{bx_1}{a}\sqrt{a^2-{x_1}^2}$

$S'(x_1)=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-{x_1}^2}-\dfrac{b{x_1}^2}{a\sqrt{a^2-{x_1}^2}}=\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a^2-(b+1){x_1}^2}{\sqrt{a^2-{x_1}^2}}=0$　　これを解いて

$x_1(>0)=\dfrac{a}{\sqrt{b+1}}$　で極大値をとるから

$S(\dfrac{a}{\sqrt{b+1}})=\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{\sqrt{b+1}}\cdot\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{b+1}}=\dfrac{ab\sqrt{b}}{b+1}$　また $y_1=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{b+1}}=\dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{b+1}}$

従って　$(x_1,y_1)=(\dfrac{a}{\sqrt{b+1}},\dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{b+1}})$ のとき S は最大値 $\dfrac{ab\sqrt{b}}{b+1}$ をとる。

(2)　$S=1$ だから $ab\sqrt{b}=b+1$ この整数解が $(2,1)$ のみであることを示せばよい。

左辺に $\sqrt{b}$ があるから　$b=n^2$ (n は正の整数）とおく。このとき $an^3=n^2+1$ から

$a=\dfrac{n^2+1}{n^3}$　　$n=b=1$ のとき　$a=2$ であるから　題意が成り立つためには $n\geq 2$

で　$(0)<\dfrac{n^2+1}{n^3}<1$　であるとよい。（分母＞分子）　　両辺に n^3 を掛けて

$f(n)=n^3-n^2-1>0$　（$n\geq 2$）がなりたつかどうか調べる。微分を使うまでもなく

$f(n)=n(n^2-n)-1=n\left\{(n-\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{1}{4}\right\}-1\geq 2\left\{(2-\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{1}{4}\right\}-1=3$

($\because n\geq 2$ で n 及び n^2-n は増加関数)　従って $f(n)\geq 3$ （$n\geq 2$）

よって　$(0)<a=\dfrac{n^2+1}{n^3}<1$ より　$n=1$ のときしか a は整数値をとらない。

すなわち、$(a,b)=(2,1)$ の時に限り　$S=1$ となる。　　以　上

（参考資料）

（第 1 問）拙著 「私の数学散歩道」p.34　問題 5　（第 2～5 問）今回自作分