私の数学散歩道（17）　　2013 年 6 月 10 日提出

自作による雑問題６問とその解答について

数実研会員　村田　洋一

今回は自作による方程式、図形と方程式、無限級数、積分と求積、簡単な積分方程式について問題と解答を作ってみました。

(第 1 問)はガウス記号が入った一次方程式ですが、どう手をつけるかで迷いそうです。(第 2 問)は図形の標準問題、(第 3 問)は分母が複雑ですがどう部分分数に分解するかが鍵になります。(第 4 問)はどのように計算するかがポイント、(第 5 問)は求積の問題ですが、計算が面倒です。最後の(第 6 問)は概ね計算問題ですが、計算ミスをしそうです。
落ち着いて行きましょう。ではははじめましょう。

問題の一覧

（第 1 問）　$[4x+1]+\dfrac{2}{3}=2x$　を解け

（第 2 問）　楕円　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$・・・①　と直線　$y=x+k$（k は定数）・・・②がある。

①が②から切り取る弦の長さが　$\dfrac{24\sqrt{6}}{13}$　であるとき、k の値を定めよ。

（第 3 問）　数列　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$　の和と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ の値を求めよ。

但し、和の分数式の項は一つにまとめ、できるだけ簡単にすること。

（第 4 問）　$I=\displaystyle\int_0^1\left\{(\sqrt{x}+1)^n+(\sqrt{x}-1)^n\right\}dx$　を求めよ。但し、n は　$n\geq 0$ の整数とする。

（第 5 問）点 $P(a,b)$ から放物線　$y=lx^2+mx+n$　に引いた 2 本の接線により囲まれた図形の面積Ｓについて次の問に答えよ。

(1)　放物線と 2 本の接線の交点を　$\alpha,\beta(\beta>\alpha)$　とする。Ｓを l,α,β で 表わせ。

(2)　Ｓを　l,m,n,a,b　で表わせ。但し、$l>0$　とする。

（第 6 問）　$f(x)=x^2+1$　は　$f(x)=2-\cos x+\displaystyle\int_0^x f(t)\sin(x-t)dt$　を満たすことを示せ。

解答例

（第１問）　$\left[4x+1\right]+\dfrac{2}{3}=2x$　を解け。

解）移項して $\left[4x+1\right]=2x-\dfrac{2}{3}$ で右辺を t とおくと $x=\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{3}$

$4x+1=4(\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{3})+1=2t+\dfrac{7}{3}$　$\left[x\right]\leq x$ より $4x+1-\left[4x+1\right]=t+\dfrac{7}{3}\geq 0$

$\left[x\right]>x-1$ より　$4x+1-\left[4x+1\right]=t+\dfrac{7}{3}<1$　これから　$-\dfrac{7}{3}\leq t<-\dfrac{4}{3}$

従って t の整数値は -2　　$2x-\dfrac{2}{3}=-2$ だから $x=-\dfrac{2}{3}$

（第２問）　楕円　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$・・①　と直線　$y=x+k$（k は定数）・・②がある。

①が②から切り取る弦の長さが $\dfrac{24\sqrt{6}}{13}$ であるとき、k の値を定めよ。

解）　①より $4x^2+9y^2-36=0$　②を代入して整理すると

$13x^2+18kx+9k^2-36=0$・・・③

①が②から弦を切り取るためには、③が２個の実数解を持たなければならない。

$\dfrac{D}{4}=81k^2-117(k^2-4)=36(13-k^2)>0$　これから　$-\sqrt{13}<k<\sqrt{13}$・・・④

②と③の２交点を　$A(x_1,\, y_1)$，$B(x_2,\, y_2)$　（但し $x_1>x_2$）とすると

$y_1=x_1+k$，$y_2=x_2+k$　より　$A(x_1,\, x_1+k)$，$B(x_2,\, x_2+k)$

③より解と係数の関係から

$$x_1+x_2=-\frac{18}{13}k,\quad x_1y_1=\frac{9(k^2-4)}{13}$$

また　$AB^2=(x_2-x_1)^2+\left\{(x_2+k)-(x_1+k)\right\}^2=2\left\{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right\}$

$$=2\left\{\frac{324}{169}k^2-\frac{36(k^2-4)}{13}\right\}=(\frac{24\sqrt{6}}{13})^2$$

$324k^2-468(k^2-4)=1728$　　$k^2=1$　　$k=\pm 1$

これは　④を満たすから　$k=\pm 1$ が求めるもの。

（第３問）数列　$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$　の和と $\lim_{n\to\infty}S_n$ の値を求めよ。

但し、和の分数式の項は一つにまとめ、できるだけ簡単にすること。

解）　部分分数に分ける方針で行く。分子に定数項のみ残るよう組み合わせを考えて

$$\frac{1}{k(k+3)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)(k+2)-k(k+3)}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{2}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

従って　$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+3)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)+\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}\right\}$$

ここで $k=1,2,3,\cdots,n-1,n$ を代入して和を作ると

中括弧の（　）内 $=(1-\frac{1}{4})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{7})+\cdots+(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-1})$

$$+(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1})+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3})=\frac{11}{6}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$$

同（第２項−３項）$=(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1})$

$$+(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n})+(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1})=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}$$

これらを纏め　$$S_n=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{11}{6}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$　分数式の項を纏めて

$$=\frac{1}{18}-\frac{(n+2)(n+3)-2(n+1)(n+3)+(n+1)(n+2)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{18}-\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$$

従って　$S_n=\frac{1}{18}-\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$　　$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{18}$

注）分母を３項ずつ括っての部分分数分解で、S_n の最終項が簡単に計算できることを

発表後 時岡・安田両先生にご指摘いただきました。

試してみるとその通りで、考えが固定化していたようです。有難うございました。

（第４問）$I=\int_0^1\left\{(\sqrt{x}+1)^n+(\sqrt{x}-1)^n\right\}dx$　を求めよ。但し、n は $n\geq 0$ の整数とする。

解）$I=\int_0^1(\sqrt{x}+1)^n\,dx+\int_0^1(\sqrt{x}-1)^n\,dx$ として

第１項で　$\sqrt{x}+1=t_1$　とおく。$t_1 \geq 1$　　$x=(t_1-1)^2$　　$dx=2(t_1-1)dt_1$

$x=0$　のとき　$t_1=1$，　$x=1$ のとき　$t_1=2$　であるから

第１項$=2\int_1^2 t_1{}^n(t_1-1)dt_1=2\left[\dfrac{t_1{}^{n+2}}{n+2}-\dfrac{t_1{}^{n+1}}{n+1}\right]_1^2=2\left(\dfrac{2^{n+2}-1}{n+2}-\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}\right)$

$$=2\cdot\frac{n(2^{n+2}-2^{n+1})+1}{(n+1)(n+2)}=2\cdot\frac{2^{n+1}\cdot n(2-1)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{2(n\cdot 2^{n+1}+1)}{(n+1)(n+2)}$$

同様にして第２項で　$\sqrt{x}-1=t_2$　とおく。

第２項$=2\int_{-1}^0 t_2{}^n(t_2+1)dt_2=2\left[\dfrac{t_2{}^{n+2}}{n+2}+\dfrac{t_2{}^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^0=-2\left(\dfrac{(-1)^{n+2}}{n+2}+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)$

$$=-2\cdot\frac{(-1)^{n+2}(n+1)+(-1)^{n+1}(n+2)}{(n+1)(n+2)}=\frac{2(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$$

よって　$I=\dfrac{2\{n\cdot 2^{n+1}+(-1)^n+1\}}{(n+1)(n+2)}$　　ここで　n の偶奇で分けて

$I=\dfrac{4(n\cdot 2^n+1)}{(n+1)(n+2)}$　（n が偶数）、$\dfrac{4n\cdot 2^n}{(n+1)(n+2)}$　（n が奇数）

（第５問）

点 $P(a,b)$ から放物線　$y=lx^2+mx+n$　に引いた２本の接線により囲まれた図形の面積Ｓについて次の問に答えよ。

⑴　放物線と２本の接線の交点を　$\alpha,\beta(\beta>\alpha)$　とする。Ｓを　l,α,β で 表わせ。

⑵　Ｓを l,m,n,a,b　で表わせ。但し、$l>0$　とする。

解）⑴ $Q(\alpha,l\alpha^2+m\alpha+c),R(\beta,l\beta^2+m\beta+c)$ とし $y=lx^2+mx+n$，　$y'=2lx+m$

$x=t$ における接線は　$y-(lt^2+mt+n)=(2lt+m)(x-t)$

よって　$y=(2lt+m)x+n-lt^2$　これが $P(a,b)$ を通るから　整理して

$lt^2-2alt+b-ma-n=0$　これが α,β を解に持つから

$\alpha+\beta=2a,\alpha\beta=\dfrac{b-ma-n}{l}$　・・・①

Q,R における接線は各々　$y=(2l\alpha+m)x+n-l\alpha^2$, $y=(2l\beta+m)x+n-l\beta^2$

求める面積　Ｓ＝$\int_\alpha^a\{lx^2+mx+n-(2l\alpha+m)x-n+l\alpha^2\}$

$+\int_a^\beta\{lx^2+mx+n-(2l\beta+m)x-n+l\beta^2\}$

$$= l\left\{\int_\alpha^a (x-\alpha)^2\,dx + \int_a^\beta (x-\beta)^2\,dx\right\} = \frac{1}{3}l\left\{\left[(x-\alpha)^3\right]_\alpha^a + \left[(x-\beta)^3\right]_a^\beta\right\}$$

$$= \frac{1}{3}l\left\{(a-\alpha)^3-(a-\beta)^3\right\} = \frac{1}{3}l(\beta-\alpha)\left\{3a^2-3a(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\right\}$$

ここで①より　$\alpha+\beta=2a$ を代入して

$$= \frac{1}{3}l(\beta-\alpha)(a^2-\alpha\beta) = \frac{1}{3}l(\beta-\alpha)\left\{\frac{(\alpha+\beta)^2}{4}-\alpha\beta\right\} = \frac{1}{12}l(\beta-\alpha)^3 \quad ・・・②$$

(2)　①より　$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{4a^2-\dfrac{4(b-ma-n)}{l}}$

$$= 2\sqrt{\frac{la^2+ma+n-b}{l}} = 2l^{-\frac{1}{2}}(la^2+ma+n-b)^{\frac{1}{2}}$$

これを　②に代入して　求める面積　$S=\dfrac{2}{3}l^{-\frac{1}{2}}(la^2+ma+n-b)^{\frac{3}{2}}$

（第 6 問） $f(x)=x^2+1$ は $f(x)=2-\cos x+\int_0^x f(t)\sin(x-t)dt$ を満たすことを示せ。

解）$f(x)=x^2+1$ より $f(t)=t^2+1$ であるから

右辺第 3 項$=\int_0^x (t^2+1)(\sin x\cos t-\cos x\sin t)dt=\sin x\left(\int_0^x t^2\cos tdt+\int_0^x \cos tdt\right)$

$$-\cos x\left(\int_0^x t^2\sin tdt+\int_0^x \sin tdt\right)=\sin x\int_0^x t^2\cos tdt-\cos x\int_0^x t^2\sin tdt+1-\cos x$$

・・・①

ここで

$$\int t^2\cos tdt = t^2\sin t-2\int t\sin tdt = t^2\sin t-2\left(-t\cos t+\int\cos tdt\right)$$

$$= 2t\cos t+(t^2-2)\sin t+C_1 \quad ・・・②$$

同様にして

$$\int t^2\sin tdt = -t^2\cos t+2\int t\cos tdt = 2t\sin t-(t^2-2)\cos t+C_2 \quad ・・・③$$

②，③の結果を①に代入して

与式$=\sin x\left[2t\cos t+(t^2-2)\sin t+C_1\right]_0^x-\cos x\left[2t\sin t-(t^2-2)\cos t+C_2\right]_0^x+1-\cos x$

$$=\sin x\left\{2x\cos x+(x^2-2)\sin x\right\}-\cos x\left\{2x\sin x-(x^2-2)\cos x-2\right\}+1-\cos x$$

$$=(x^2-2)(\sin^2 x+\cos^2 x)+2\cos x+1-\cos x=x^2-1+\cos x$$

従って　$f(x)=2-\cos x+x^2-1+\cos x=x^2+1$　となり、題意が示された。

以　上