自作のいろいろな方程式とその解法について

数実研会員　　村田　洋一

本稿では余り見ない幾つかの方程式とその応用問題を考え、それらの解法をまとめてみました。特別な形の三元三次連立方程式、平方根・立方根を含む連立方程式、$\log(\sin x)$ と $\log(\sin y)$,あるいは $\log(\log u)$ を含む方程式、前提条件なしに $\tan\dfrac{\pi}{20}$ を計算で求める問題、一次式に指数関数が混じった連立方程式です。

最初に問題を示し、その後に解法を記載します。

（問題）　次の連立方程式を解け。(2)は実数解を求めよ。

(1)
$2x+3y-z=7$　・・・・　①

$x^2+y^2+z^2=38$　・・・・　②

$x^3-3xy-y^3=1$　・・・・　③

(2)
$x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=5$　・・・・　①

$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=9$　・・・・　②

(3)　次の連立方程式を解け。但し、$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，$0<y<\dfrac{\pi}{2}$　とする。

$2\log(\sin x)-\log(\sin y)=-\dfrac{1}{2}\log 3$　・・・・①

$2x+y=\dfrac{5}{6}\pi$　・・・・②

(4)　次の対数方程式を解け。

$\log_2\{\log_x(6x^3-13x^2+12x-4)\}=2$　・・・・①

(5)　$\tan\dfrac{\pi}{20}$　の値を求めよ。

(6)　次の連立方程式を解け。但し、n は自然数とする。

$3\cdot 2^{n-1}+a=27$　・・・・　①　$5^n-7a=604$　・・・・②

（解答）

(1)　③を次のように変形して因数分解を考える。

$x^3+(-y)^3+(-1)^3-3x(-y)\cdot(-1)=0$

$\dfrac{1}{2}(x-y-1)\{(x+y)^2+(-y+1)^2+(-1-x)^2\}=0$　・・・④　④より

イ）$y=x-1$　のとき　①に代入して　$z=5(x-2)$

これらを②に代入して　$x^2+(x-1)^2+25(x-2)^2=38$

$27x^2-102x+63=0$　$x=\dfrac{51\pm 30}{27}$　より　$x=3$、$\dfrac{7}{9}$

$(x,y,z)=(3,2,5)$,　$(\dfrac{7}{9},-\dfrac{2}{9},-\dfrac{55}{9})$

ロ）$x+y=0$,　$-y+1=0$,　$-1-x=0$　即ち　$x=-1$,　$y=1$　のとき

①より　$-2+3-z=7$　より $z=-6$　よって　$(x,y,z)=(-1,1,-6)$

これらの解は　②をみたす。

イ）とロ）を纏めて　$(x,y,z)=(3,2,5)$,　$(\dfrac{7}{9},-\dfrac{2}{9},-\dfrac{55}{9})$　$(-1,1,-6)$

注）　④の中括弧内×$\dfrac{1}{2}$で　$x^2+y^2+xy+x-y+1=0$ とすると、計算が

進まなくなり要注意！

(2)　①，②の両辺を各々3乗、自乗して変形する

$x+y+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})=x+y+15x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}=125$　・・・・③

$x+y+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}=81$　・・・・④

③－④　$15x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}-44=0$

ここで　$x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}=t>0$　とおく。　また②より　$x>0, y>0$

①より　$x^{\frac{1}{3}}=5-y^{\frac{1}{3}}>0$　$0<y<125$　同様に　$0<x<125$ で

あるが　$x^{\frac{1}{2}}=9-y^{\frac{1}{2}}>0$ より　$0<y<81$　同様に　$0<x<81$ で

まとめて　$0<x<81$,　$0<y<81$ となる。

これから $0 < xy < 81^2$　$0 < (xy)^{\frac{1}{6}} = t < 3^{\frac{8}{6}} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 4.3266$　・・・⑤

$15t^2 - 2t^3 = 44$　　$2t^3 - 15t^2 + 44 = 0$　　$f(t) = 2t^3 - 15t^2 + 44$ とおくと

⑤の範囲で　$f(t)$　の解の組を求めるとよい。

因数定理より　$f(t) = (t-2)(2t^2 - 11t - 22) = 0$

これを解いて　　$t = 2$ 、$\dfrac{11 \pm 3\sqrt{33}}{4}$

イ）$t = 2$ のとき $xy = 64$　④より $x + y = 65$　よって　$(x, y) = (1,64), (64,1)$,

ロ）$t = \dfrac{11 + 3\sqrt{33}}{4} = 7.058$ 、$t = \dfrac{11 - 3\sqrt{33}}{4} = \dfrac{\sqrt{121} - \sqrt{297}}{4} < 0$ は不適。

よって求める実数解は　$(x, y) = (1,64), (64,1)$,

(3)　②より　$y = \dfrac{5}{6}\pi - 2x$　　$0 < \dfrac{5}{6}\pi - 2x < \dfrac{\pi}{2}$ から仮定とあわせ $\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{5}{12}\pi$

$x = \dfrac{1}{2}(\dfrac{5}{6}\pi - y)$　$0 < \dfrac{5}{6}\pi - y < \pi$ から仮定とあわせ $0 < y < \dfrac{\pi}{2}$

①より真数 > 0　から　$\sin x > 0$，$\sin y > 0$ ∴　$0 < x < \pi$　$0 < y < \pi$

これらの共通範囲は　$\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{5}{12}\pi$，$0 < y < \dfrac{\pi}{2}$　　・・・・③

①より $\sin y = \sin(\dfrac{5}{6}\pi - 2x) = \sin(\pi - (2x + \dfrac{\pi}{6})) = \sin(2x + \dfrac{\pi}{6})$

$\log \dfrac{\sin^2 x}{\sin y} = \log \dfrac{\sin^2 x}{\sin(2x + \dfrac{\pi}{6})} = \log \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　から　$\sqrt{3}\sin^2 x = \sin(2x + \dfrac{\pi}{6})$

右辺＝$\sqrt{3}\sin x \cos x + \dfrac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x)$　であるから

$\cos^2 x + 2\sqrt{3}\cos x \sin x - (2\sqrt{3} + 1)\sin^2 x = 0$　　$\cos^2 x (\neq 0)$ で割って

$(2\sqrt{3} + 1)\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x - 1 = 0$

$\tan x = \dfrac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3 + 2\sqrt{3} + 1}}{2\sqrt{3} + 1} = \dfrac{\sqrt{3} \pm (\sqrt{3} + 1)}{2\sqrt{3} + 1}$　③より　$\tan x > 0$ で

あるから　$\tan x = 1$　　$x = \dfrac{\pi}{4}$　これを②に代入して　$y = \dfrac{\pi}{3}$

これらは　③より適する。　よって　$(x,y)=(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})$

注）　x を消去すると計算が結構込み入ってくる。　一般的には式の形から
y を消去すると思うが・・・。

(4)　①から　$\log_2\{\log_x(6x^3-13x^2+12x-4)\}=\log_2 4$

中括弧内を α とおくと α は真数で $\alpha>0$，$\log_2\alpha=2$ から $\alpha=4$

底、真数の条件から　$x>0$，$x\neq1$，$6x^3-13x^2+12x-4>0$ ・・・②

また　$\alpha=\log_x(6x^3-13x^2+12x-4)>0=\log_x 1$　・・・・・・③

②より　$(3x-2)(2x^2-3x+2)>0$　$2x^2-3x+2=2(x-\frac{3}{4})^2+\frac{7}{8}>0$ から

$x>\frac{2}{3}$ 底の条件とあわせて $\frac{2}{3}<x<1$　$x>1$　・・・④　④とあわせて考え

イ）底 $x>1$ のとき ③より　$6x^3-13x^2+12x-5>0$

$(x-1)(6x^2-7x+5)>0$　$6x^2-7x+5=6(x-\frac{7}{12})^2+\frac{71}{24}>0$ より　$x>1$

これから　$x>1$ のとき　$\alpha=4$ を解けばよい。

$\log_x(6x^3-13x^2+12x-4)=\log_x x^4$

$x^4-6x^3+13x^2-12x+4=0$　$(x-1)^2(x-2)^2=0$　$x>1$ より　$x=2$ が解

ロ）④より底が $\frac{2}{3}<x<1$ のとき　上記と同様に $x<1$、$\alpha=4$ からは　$x=1$，$x=2$ が出てくるがこれらは不適。従ってイ)、ロ）より　$x=2$ が求める解になる。

(5)　$\tan\frac{\pi}{20}$ の値を求めよ。

$\theta=\frac{\pi}{20}$，　$\tan\theta=x$ とすると　$\tan5\theta=\tan\frac{\pi}{4}=1$　また $\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ より

$$\tan3\theta=\tan(2\theta+\theta)=\frac{\tan2\theta+\tan\theta}{1-\tan2\theta\tan\theta}=\frac{\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}+\tan\theta}{1-\frac{2\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}}=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

従って　$\tan 5\theta = \tan(2\theta + 3\theta) = \dfrac{\tan 2\theta + \tan 3\theta}{1 - \tan 2\theta \tan 3\theta} = \dfrac{\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} + \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}}{1 - \dfrac{2\tan^2\theta(3-\tan^2\theta)}{(1-\tan^2\theta)(1-3\tan^2\theta)}}$

$$= \frac{2\tan\theta(1-3\tan^2\theta) + \tan\theta(3-\tan^2\theta)(1-\tan^2\theta)}{(1-\tan^2\theta)(1-3\tan^2\theta) - 2\tan^2\theta(3-\tan^2\theta)} = \frac{\tan\theta(\tan^4\theta - 10\tan^2\theta + 5)}{5\tan^4\theta - 10\tan^2\theta + 1} = 1$$

これから　$5x^4 - 10x^2 + 1 = x^5 - 10x^3 + 5x$　　　$x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 5x - 1 = 0$

左辺を $f(x)$ とおくと、明らかに $f(1) = 0$　また　$0 < x < 1$　から　　$x \neq 1$

$x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 1 = 0$　　　これは相反方程式であるから $x^2 (\neq 0)$ で

割って　　$(x + \frac{1}{x})^2 - 4(x + \frac{1}{x}) - 16 = 0$

$x > 0$ より　　$x + \frac{1}{x} = 2 + \sqrt{4+16} = 2(1+\sqrt{5})$

これより　$x^2 - 2(1+\sqrt{5})x + 1 = 0$

$x = 1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{(1+\sqrt{5})^2 - 1} = 1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$

$0 < x < 1$　かつ$1 + \sqrt{5} - \sqrt{5+2\sqrt{5}} = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} > 0$　から

$x = 1 + \sqrt{5} - \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$　　　これから　$\tan\frac{\pi}{20} = 1 + \sqrt{5} - \sqrt{5+2\sqrt{5}} (= 0.1584)$

(6)　$3 \cdot 2^{n-1} + a = 27$　・・・①　$5^n - 7a = 604$　・・・②　（n は自然数）

①より　$a - 27 = -3 \cdot 2^{n-1} < 0$　　$a < 27$

$2a - 54 = -3 \cdot 2^n$　　　　・・・③

②より　$7a + 604 = 5^n$　　　　・・・④

③×④　$(2a - 54)(7a + 604) = -3 \cdot 10^n$

$$14a^2 + 830a + 3 \cdot 10^n - 32{,}616 = 0$$

ここで　$\frac{D}{4} = 415^2 - 14(3 \cdot 10^n - 32{,}616) = 628{,}849 - 42 \cdot 10^n > 0$

$14{,}972.6 - 10^n > 0$　　n は自然数であるから　$1 \leq n \leq 4$

イ） $n=4$ のとき　①より　$3\cdot 2^3+a=27$　　$a=3$

このとき　②より　　$5^4-7\cdot 3=625-21=604$　でなりたつ。

ロ） $n=4$ で成立したので①、②は $n=1,2,3$ で同時に成り立つことはない。

従って　$(n,a)=(4,3)$

別解）

①と②から a を消去して　$21\cdot 2^{n-1}+5^n=793$

移項して　左辺＞>0　　$21\cdot 2^{n-1}=793-5^n>0$

$n>0$　の自然数より　$1\le n\le 4$　とすることができる。

以　上

（参考文献）

１．問題(1)～(4) は 自作問題で、今回のリリースのため作成したもの。

２．問題(5)　拙著　「私の数学散歩道」問題編３．問題５．一部改題

問題(6)　　同　　　上　　　問題編３．問題１．の（9）