私の数学散歩道(14)　 2012 年 12 月 2 日提出

「方程式が解を持たない」ことを利用して解く問題の作問について

数実研会員　村田　洋一

今回は「方程式の解が存在しない」ことを示すことで解ける問題を考えまとめてみました。このテーマ決定のきっかけとなったのは「初等数学」課題 68-3 (2)で小生が解いた(第 1 問)で、∠CAQ=∠R と仮定すると $m^2 - m\sin\alpha + \cos\alpha = 0$ $(m = 1 + \cot\dfrac{\alpha}{2})$,この三角方程式が $\pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi$ で解を持たないことにより A が M に，B が O に一致する以外は∠CAQ＜∠R を示しました。

この考え方で解ける似た問題を作ってみようと作問したのが(第 2 問)、(第 3 問)です。(第 1 問)もベクトルの内積利用ほかいくつか解法がありますが、方程式が解をもたないことに絞って解答をまとめ、テーマとした次第です。

（第 1 問）

線分 MN と PQ は円 O の半径で直交している。OM、ON 上にそれぞれ MA=OB となるように点 A，B をとる。線分 QB の延長が円と交わる点を C とする。
このときにできる∠CAQ が∠R になるかどうか調べよ。

解）　今、座標を次の通りおく。

$Q(a, 0)$　$M(0, a)$　$A(0, ma)$　但し $0 < m < 1$

$C(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$

但し $\pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi$ 、$\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{3}{4}\pi$ ・・・①　　　図は 12/1 の数実研で配布の資料を参照してください。

$O(0,0)$　$N(0, -a)$　$P(-a, 0)$

これから各々の直線の方程式を求めると

QA：　$y = -m(x-a)$ ・・・②

AC：$y = \dfrac{a\sin\alpha - ma}{a\cos\alpha}x + ma$ ・・・③

CQ：$y = \dfrac{a\sin\alpha}{a\cos\alpha - a}(x-a)$ ・・・④

④で $x=0$ とおくと $y=\dfrac{-a^2\sin\alpha}{a\cos\alpha-a}=\dfrac{2a\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=a\cot\dfrac{\alpha}{2}$

従って B(0, $a\cot\dfrac{\alpha}{2}$) MA= $a(1-m)$ OB ＝ $-a\cot\dfrac{\alpha}{2}$ $\therefore\ a(1-m)=-a\cot\dfrac{\alpha}{2}$

$m=1+\cot\dfrac{\alpha}{2}$ ・・・⑤ また $0<m<1$ より $-1<\cot\dfrac{\alpha}{2}<0$

∠CAQ=∠R と仮定すると ②、③の直交条件から

$-m\cdot\dfrac{\sin\alpha-m}{\cos\alpha}=-1$ $m^2-m\sin\alpha+\cos\alpha=0$ ・・・⑥

⑤を⑥に代入し得られた三角方程式が①の範囲で解を持てば仮定が成り立つ。代入して

⑥の左辺＝$(1+\cot\dfrac{\alpha}{2})^2-\sin\alpha(1+\cot\dfrac{\alpha}{2})+\cot\alpha$

$$=\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)+(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2})$$

$$=-\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}(\sin^3\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2})$$

$$=-\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}(\sin\frac{\alpha}{2}-1)(\sin\frac{\alpha}{2}+1)(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2})^2=0$$

これから $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm1$ $\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{2}\sin(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{4})=0$

解は $\alpha=\pi$ 、$\alpha=\dfrac{3}{2}\pi$ などから⑥は①の範囲では解を持たない。

従って∠CAQ=∠R にはならない。MA=OB=0 のとき $-a\cot\dfrac{\alpha}{2}=0$ から

$\alpha=\pi$ で C が P に、A が M に（B が O に）それぞれ移り M が y 軸上となるから

このときに限り∠CAQ=∠R となる。

（第２問）　不等式　$16x^5-20x^3+5x\geq -1\ \ (x\geq 0)$ を証明せよ。

解）$f(x)=16x^5-20x^3+5x+1$　とおく。　$x\geq 0$ で　$f(x)$ の極小値が正または０を示せばよい。

$$f'(x)=5(16x^4-12x^2+1)=\frac{5}{16}\{16x^2-(6+2\sqrt{5})\}\{16x^2-(6-2\sqrt{5})\}$$

$$=80(x+\frac{\sqrt{5}+1}{4})(x-\frac{\sqrt{5}+1}{4})(x+\frac{\sqrt{5}-1}{4})(x-\frac{\sqrt{5}-1}{4})$$

$x\geq 0$ で　$f'(x)$ の符号を調べて

x	0	・・・	$(\sqrt{5}-1)/4$	・・・	$(\sqrt{5}+1)/4$	・・・
$f'(x)$		(+)	0	(−)	0	(+)
$f(x)$	1	増加	極大値２	減少	極小値 0	増加

これから　$x=(\sqrt{5}+1)/4$ で極小値をとる。$x=(1\pm\sqrt{5})/4$ を解とする２次方程式は

$4x^2-2x-1=0$　割り算を実行し $f(x)=(4x^2-2x-1)(4x^3+2x^2-3x-1)=(x+1)\times$

$(4x^2-2x-1)^2$　より　$f(\frac{1+\sqrt{5}}{4})=0$

$f(x)=(4x^2+2x-1)(4x^3-2x^2-3x+1)+2=(x-1)(4x^2+2x-1)^2+2$ から極大値は

$f(\frac{\sqrt{5}-1}{4})=2$　　$x\geq 0$　で $f(x)=0$ は　$x=(\sqrt{5}+1)/4$ 以外の解を持たないから

$f(x)\geq 0\ (x\geq 0)$

従って 不等式　$16x^5-20x^3+5x\geq -1\ (x\geq 0)$　が成りたつ。

（第３問）　$\cos\theta$，$\cos\frac{\theta}{2}$，$\cos\frac{\theta}{2^2}$　はこの順に等比数列になりえないことを証明せよ。

但し、$0<\theta<2\pi$　とする。

解）　$\cos\theta$，$\cos\frac{\theta}{2}$，$\cos\frac{\theta}{2^2}$　が等比数列をなすから　$\cos^2\frac{\theta}{2}=\cos\theta\cos\frac{\theta}{4}$　・・・①

が成立つ。　倍角公式を繰り返して用い $\cos\theta$，$\cos\frac{\theta}{2}$　を　$\cos\frac{\theta}{4}$ で表す。

$$\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=2(2\cos^2\frac{\theta}{4}-1)^2-1=8\cos^4\frac{\theta}{4}-8\cos^2\frac{\theta}{4}+1$$

$\cos\frac{\theta}{2}=2\cos^2\frac{\theta}{4}-1$　　これらを①に代入して整理すると

$8\cos^5\frac{\theta}{4}-4\cos^4\frac{\theta}{4}-8\cos^3\frac{\theta}{4}+4\cos^2\frac{\theta}{4}+\cos\frac{\theta}{4}-1=0$　ここで　$\cos\frac{\theta}{4}=t$　とし

左辺を $g(t)$ とおく。$0<\theta<2\pi$ より　$0<\dfrac{\theta}{4}<\dfrac{\pi}{2}$　から　$0<t<1$

従って　$g(t)=0$ の実根で $0<t<1$　のものが見つかればよい。

$g(1)=0$　から　$g(t)=(t-1)(8t^4+4t^3-4t^2+1)=0$

$t\neq 1$　より　$f(t)=8t^4+4t^3-4t^2+1$　とおく。$f'(t)=4t(8t^2+3t-2)=0$ から

$t=0$,　$\dfrac{-3\pm\sqrt{73}}{16}$ $\to$ 0.3465,　-0.7215　$0<t<1$ の範囲で $f(t)$ の増減表を書く

と $t=\dfrac{-3+\sqrt{73}}{16}$ のとき $f(t)$ は極小値をとる。

t	(0)	・・	$\dfrac{-3+\sqrt{73}}{16}$	・・・・・	(1)
$f'(t)$	(0)	$(-)$	0	$(+)$	
$f(t)$	(1)	減少	極小値 0.8014	増加	(9)

割り算を実行して

$$f(t)=(8t^2+3t-2)(t^2+\frac{t}{8}-\frac{19}{64})+\frac{73}{64}t+\frac{13}{32}$$

よって　$f(\dfrac{-3+\sqrt{73}}{16})=\dfrac{73}{64}\cdot\dfrac{-3+\sqrt{73}}{16}+\dfrac{13}{32}=\dfrac{197+73\sqrt{73}}{1024}=0.8014$

これから $f(t)$ ひいては $g(t)$ は $0<t<1$ の範囲に解を持たない。

従って $\cos\theta$，$\cos\dfrac{\theta}{2}$，$\cos\dfrac{\theta}{2^2}$　がこの順に等比数列をなすことはない。

以　上

(参照文献)

1．(第 1 問)　「初等数学」掲載課題 68-3 (2)　解答は小生作成

2．(第 2 問)　　拙著　「私の数学散歩道」　P.38　問題 4 (3)より抜粋

3．(第 3 問)　　今回自作の問題