私の数学散歩道(12)　2012年8月8日提出

数実研会員　　村田　洋一

連 立 方 程 式 を 解 く 楽 し み

～ラグランジュの未定乗数法：多変数関数の極値の算定について～

周知の通り多変数関数の極値は偏微分で求められます。その際 偏微導関数や偏微係数、極値決定のための行列式の計算等が煩雑です。その点 ラグランジュの未定乗数法ではとくに 極値の存在がわかっている場合､計算が 連立方程式の解法に帰せられ親しみやすく今般、方程式の解法を楽しみながら、例題3題を未定乗数法に絞って纏めてみました。問題により方程式の解法に一工夫必要なケースが多いものの､興味深く面白く解くことができました。しかし冗長な点もあり、よりうまい解法をご教示願えれば幸いです。

問1． $x,y,z \geq 0$ かつ　$x+y+z=1$ のとき $f(x,y,z)=xy^2z+xyz^2$

の最大値を求めよ。

解）条件式を $h(x,y,z,\lambda)=xy^2z+xyz^2+\lambda(x+y+z-1)$ とする。ラグランジュの未定乗数法により、$g(x,y,z)=x+y+z-1=0$ のとき $f(x,y,z)$ が極値をとるとして

$f_x=-\lambda g_x$　$f_y=-\lambda g_y$　$f_z=-\lambda g_z$ を満たす λ が存在する。（$\because g_x \neq 0,\ g_y \neq 0,\ g_z \neq 0$）

$y^2z+yz^2=-\lambda$ ・・・①　$2xyz+xz^2=-\lambda$ ・・・②　$xy^2+2xyz=-\lambda$ ・・・③

②－③より　$x(z^2-y^2)=0$　　$x=0$、$z=-y$ のときは各々 $\lambda=0$、$f(x,y,z)=0$ となって不適。　（各々 $(x,y,z)=(0,1,0),(0,0,1)$、$(x,y,z)=(1,0,0)$）

$z=y$ のとき　①より　$\lambda=-2y^3$　これを②に代入して　$3xy^2-2y^3=0$　同様に

$y \neq 0$ から　$x=\frac{2}{3}y=\frac{2}{3}z$　　よって　条件式より　$x+\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x=1$　$x=\frac{1}{4}$

$y=z=\frac{3}{8}$　$\lambda=-\frac{27}{256}$　$f(\frac{1}{4},\frac{3}{8},\frac{3}{8})=\frac{3^3}{4^5}=\frac{27}{1024}$　これが求める最大値である。

問2．$x,y,z>0$ で $xyz(x+y+z)=1$ を満たすとき $f(x,y,z)=(x+y)(y+z)$

の最小値を求めよ。

解）　条件式を$h(x,y,z,\lambda)=(x+y)(y+z)+\lambda\{xyz(x+y+z)-1\}$とする。

$g(x,y,z)=xyz(x+y+z)-1=0$　のとき　$f(x,y,z)$が極値をとると

して問 1.と同様に考え　連立方程式①～④を解く。

$$xyz(x+y+z)=1 \quad \cdot\cdot\cdot\cdot ①$$

$$y+z=-\lambda yz(2x+y+z) \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

$$x+2y+z=-\lambda zx(x+2y+z) \quad \cdot\cdot\cdot ③$$

$$x+y \quad =-\lambda xy(x+y+2z) \cdot\cdot\cdot ④$$

②× x+③× y +④× z　を作るとその式の

左辺＝$x(y+z)+y(x+2y+z)+z(x+y)=2\{y^2+(z+x)y+zx\}$

$=2(y+z)(y+x)$

右辺＝$-\lambda xyz(4x+4y+4z)=-4\lambda xyz(x+y+z)=-4\lambda$　(①より)

よって　$f(x,y,z)=(x+y)(y+z)=-2\lambda>0$ ・・・⑤

これから　$\lambda<0$　（$\because$　$x>0, y>0, z>0$）

また ③より　$x>0, y>0, z>0$から　$x+2y+z>0$　よって$-\lambda zx=1$・・・⑥

③－②－④　を作ると 左辺＝0　$\lambda\neq 0$　から

右辺＝$zx(x+2y+z)-yz(2x+y+z)-xy(x+y+2z)$

$=z^2(x-y)+z(x^2-2xy-y^2)-xy(x+y)=0$

この　z についての 2 次方程式を解いて

$z=\dfrac{-(x^2-2xy-y^2)\pm(x^2+y^2)}{2(x-y)}$　これから$z=\dfrac{y(x+y)}{x-y}$　・・・⑦

or　$z=\dfrac{-x(x-y)}{x-y}=-x$（$\because$　$x=y$のときは不適）　$z=-x$　は不適。

⑦より $f(x,y,z)=(x+y)(y+z)$を作る。

$y+z=y+\dfrac{y(x+y)}{x-y}=\dfrac{2xy}{x-y}$　　$\therefore$　$(y+z)(y-x)=-2xy$

左辺＝$(y+z)(y+x)-2xy-2zx=-2xy$　$\therefore (y+z)(y+x)=2zx$ ・・⑧

⑤、⑧より　$2zx=-2\lambda$　　$zx=-\lambda$を⑥に代入して　$\lambda^2=1$（$\lambda<0$）

従って　$\lambda=-1$　　このとき　②、④は

$y+z=yz(2x+y+z)$ ・・・⑨　　　⑨－⑩より

$x+y=xy(x+y+2z)$ ・・・⑩　　　$z-x=yz^2+y^2z-x^2y-xy^2$

前式に　$z=\dfrac{1}{x}$を代入して整理すると　$(x^3-x)y^2+(x^4-1)y+x-x^3=0$

$(x+1)(x-1)\{xy^2+(x^2+1)y-x\}=0$　$x>0$より　$x=1$　$z=1$

⑦より $\dfrac{y(y+1)}{1-y}=1$ $y^2+2y-1=0$ $y>0$ より $y=\sqrt{2}-1$

また $x=1$ $y=\sqrt{2}-1$ は $xy^2+(x^2+1)y-x=0$ を満たす。

以上の議論から $(x,y,z,\lambda)=(1,\sqrt{2}-1,1,-1)$ $f(x,y,z)=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$

従って未定乗数法で求まった $f(1,\sqrt{2}-1,1)=2$ は最小値である。

問 3. $x,y,z>0$ で $x^2+5xy+y^2+z^2-1=0$ を満たすとき、$f(x,y,z)=x^3y^2z$

の最大値を求めよ。

解）条件式を $h(x,y,z)=x^3y^2z+\lambda(x^2+5xy+y^2+z^2-1)$ とする。 問 2.と同様に

$g(x,y,z)=x^2+5xy+y^2+z^2-1=0$ のとき $h(x,y,z)=0$ が極値をとるとして
各々 x,y,z で偏微分すると

$3x^2y^2z+\lambda(2x+5y)=0$ ・・・①
$2x^3yz+\lambda(2y+5x)=0$ ・・・②
$x^3y^2+2\lambda z=0$ ・・・③

①、②より $3x^2y^2z=-\lambda(2x+5y)$ ・・・④ $2x^3yz=-\lambda(2y+5x)$ ・・・⑤

④÷⑤ $\dfrac{3y}{2x}=\dfrac{2x+5y}{2y+5x}$ $4x^2-5xy-6y^2=0$ $(x-2y)(4x+3y)=0$

1) $y=\dfrac{1}{2}x$ のとき ①へ代入、整理して $x^3z+6\lambda=0$ ・・・⑥

同様に ③へ代入 $x^5z+8\lambda z=0$ ・・・⑦

⑥、⑦から λ を消去して $z^2=\dfrac{3}{4}x^2$ 条件式に y, z^2 を代入して

$(1+\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4})x^2-1=0$ $x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$（$x>0$ より） $y=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

⑥より $\lambda=-\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{27}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{243}$ $x^3y^2z=\dfrac{2\sqrt{2}}{27}\cdot\dfrac{1}{18}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{729}$

2) $y=-\dfrac{4}{3}x$ のとき ①より $\dfrac{16}{3}x^4z-\dfrac{14}{3}\lambda x=0$ これから $\lambda=\dfrac{8}{7}x^3z$ ・・⑧

③より $8x^5+9\lambda z=0$ ⑧を代入して $7x^2+9z^2=0$
$x,z\neq 0$ かつ実数よりこの時は不適になる。

また条件式において $(x+y)^2+3xy+z^2-1=0$

$(x+y)^2 = 1-3xy-z^2 > 0$　　$z^2 < 1-3xy$　　これから　$0 < xy < \dfrac{1}{3}$ ・・・⑨

$y = \dfrac{1}{2}x$ のとき　⑨より　$0 < \dfrac{1}{2}x^2 < \dfrac{1}{3}$　よって　$0 < x < \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

同様に　$0 < 2y^2 < \dfrac{1}{3}$　よって　$0 < y < \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

$0 < x^3y^2z = (xy)^2xz < \dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}z = \dfrac{\sqrt{6}}{27}z$

更に条件式は x の整式として　$x^2+5yx+y^2+z^2-1=0$ と書ける。

$D = 25y^2 - 4(y^2+z^2-1) \geq 0$　から　$z^2 \leq \dfrac{21}{4}y^2+1$　で　z も有限である

従って　$f(\dfrac{\sqrt{2}}{3}, \dfrac{\sqrt{2}}{6}, \dfrac{\sqrt{6}}{6}) = \dfrac{\sqrt{3}}{729}$　（$\lambda = -\dfrac{\sqrt{3}}{243}$）が求める最大値である。

以　上

注）

問 2.の別解）前記の解答を作ってから思いついたもの。この方が簡単だった。

$x+2y+z \neq 0$　に注意して②÷③、③÷④を各々作ると

$y^2+2xy+yz-y-z=0$ ・・・(1)　　(1)−(2)より　$(x-1)(y+z)=0$

$y^2+xy+yz-zx=0$　　・・・(2)　　　　これから　$x=1$ ・・・(3)

(3)を(1)に代入して　$z = -\dfrac{y(y+1)}{y-1}$ ・・・(4)　(3),(4)を①に代入して整理すると

$y^4+2y^3+2y-1=0$　　因数分解できて　$(y^2+1)(y^2+2y-1)=0$

これから　$y=\sqrt{2}-1$　　以下　略す。

【問題の出典】

問 1．「初等数学」　第 68 号　課題 3 (1)　解答は当方作成

問 2.　同　　上　　第 69 号　課題 3　　同上（解答は 11 月発行第 70 号で公表予定)

問 3.　今回作成の「自作問題」　　　　　同上