私の数学散歩道(9)　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　2011.11.30.

ピアーズ・フォスター　簡約積分表の公式の証明

数実研会員　　村田　洋一

積分の計算は数学Ⅲの一つの核をなすもので、題記の積分表を見て役立ちそうな分野の公式を証明しておくと授業にも有用と考え、取り上げることにした。

今回は「対数関数を含む式」とし 442 から 460 のすべての公式の証明をつけた。

知らない公式も多いが、これにより難関大学を含め入試等に出てくる対数関数を含む積分の計算に殆ど対応できると思う。

解法のポイントは置換積分と部分積分が主であるが、結構計算が面倒なものもある。
なお、対数記号の中は正、分母$\neq 0$とし積分定数の記載は省略した。
記載の構成はｐ.2 までは(公式の纏め)、p.3～6 は(公式の証明)とした。

次回は「三角関数を含む式」を取り上げる。

（公式の纏め）

442. $\int \log x dx = x\log x - x$

443. $\int x^m \log x dx = x^{m+1}\left\{\frac{\log x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right\}$

444. $\int (\log x)^n dx = x(\log x)^n - n\int (\log x)^{n-1} dx$

445. $\int x^m (\log x)^n dx = \frac{x^{m+1}(\log x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m (\log x)^{n-1} dx$

446. $\int \frac{(\log x)^n}{x} dx = \frac{(\log x)^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$

447. $\int \frac{dx}{(\log x)^n} dx = -\frac{x}{(n-1)(\log x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{(\log x)^{n-1}}$

448. $\int \frac{x^m}{(\log x)^n} dx = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\log x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m}{(\log x)^{n-1}} dx$

449. $\int \frac{x^m}{\log x}dx = \int \frac{e^{-y}}{y}dy$ 但し $y = -(m+1)\log x$ 450. $\int \frac{dx}{x\log x} = \log(\log x)$

451. $\int \frac{(n-1)dx}{x(\log x)^n} = -\frac{1}{(\log x)^{n-1}}$

452. $\int log(a^2 + x^2)dx = x\log(a^2 + x^2) - 2x + 2a\tan^{-1}\frac{x}{a}$

453. $\int (a+bx)^m \log x dx = \frac{1}{b(m+1)}\left[(a+bx)^{m+1}\log x - \int \frac{(a+bx)^{m+1}}{x}dx\right]$

454. $\int x^m \log(a+bx)dx = \frac{1}{m+1}\left[x^{m+1}\log(a+bx) - b\int \frac{x^{m+1}}{a+bx}dx\right]$

455. $\int \frac{\log x dx}{(a+bx)^m} = \frac{1}{b(m-1)}\left\{-\frac{\log x}{(a+bx)^{m-1}} + \int \frac{dx}{x(a+bx)^{m-1}}\right\}$

456. $\int \frac{\log x dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\log x \log(a+bx) - \frac{1}{b}\int \frac{\log(a+bx)}{x}dx$

457. $\int (a+bx)\log x dx = \frac{(a+bx)^2}{2b}\log x - \frac{a^2\log x}{2b} - ax - \frac{bx^2}{4}$

458. $\int \frac{\log x}{\sqrt{a+bx}}dx$ (解は二段表示　前段 $a>0$ の時、後段 $a<0$ の時)

$= \frac{2}{b}\left[(\log x - 2)\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}\log(\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}) - \sqrt{a}\log(\sqrt{a+bx} - \sqrt{a}\right]$

$= \frac{2}{b}\{(\log x - 2)\sqrt{a+bx} + 2\sqrt{-a}\tan^{-1}\sqrt{\frac{a+bx}{-a}}\ \}$

459. $\int \sin\log x dx = \frac{1}{2}x(\sin\log x - \cos\log x)$

460. $\int \cos\log x = \frac{1}{2}x(\sin\log x + \cos\log x)$

(参考文献)

ピアース・フォスター　簡約積分表　第 4 版　ブレイン図書出版（株）

「対数関数を含む式」　442～460.

（公式の証明）

442. $\int \log x dx = x\log x - \int dx = x\log x - x$

443. $\int x^m \log x dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}\log x - \int \dfrac{x^{m+1}}{m+1}\cdot\dfrac{dx}{x} = x^{m+1}\left\{\dfrac{\log x}{m+1} - \dfrac{1}{(m+1)^2}\right\}$

444. $\int (\log x)^n dx = x(\log x)^n - \int x\cdot\dfrac{n}{x}(\log x)^{n-1} = x(\log x)^n - n\int (\log x)^{n-1} dx$

445. $\int x^m (\log x)^n dx = \dfrac{x^{m+1}(\log x)^n}{m+1} - \int \dfrac{x^{m+1}}{m+1}\cdot\dfrac{n}{x}(\log x)^{n-1} dx$

$= \dfrac{x^{m+1}(\log x)^n}{m+1} - \dfrac{n}{m+1}\int x^m (\log x)^{n-1} dx$

446. $\int \dfrac{(\log x)^n}{x} dx = \int (\log x)'(\log x)^n dx = (\log x)^{n+1} - n\int \dfrac{(\log x)^n}{x} dx$

よって $(n+1)\int \dfrac{(\log x)^n}{x} dx = (\log x)^{n+1}$ $\therefore$ $\int \dfrac{(\log x)^n}{x} dx = \dfrac{(\log x)^{n+1}}{n+1}$ $(n \neq -1)$

447. $\int \dfrac{dx}{(\log x)^n}$ $\log x = t$ とおくと $x = e^t$ $dx = e^t dt$ から 与式$= \int t^{-n} e^t dt$

$= -\dfrac{t^{-n+1}}{n-1}e^t + \dfrac{1}{n-1}\int t^{-n+1} e^t dt = -\dfrac{x}{(n-1)(\log x)^{n-1}} + \dfrac{1}{n-1}\int \dfrac{dx}{(\log x)^{n-1}}$

448. $\int \dfrac{x^m}{(\log x)^n} dx$ $\log x = t$ とおく 447. と同じ置き換えで

与式$= \int t^{-n} e^{(m+1)t} dt = -\dfrac{t^{-n+1}}{n-1} e^{(m+1)t} + \dfrac{m+1}{n-1}\int t^{-n+1} e^{(m+1)t} dt$

$= -\dfrac{x^{m+1}}{(n-1)(\log x)^{n-1}} + \dfrac{m+1}{n-1}\int \dfrac{x^m}{(\log x)^{n-1}} dx$ $\left(\because e^{(m+1)t} dt = e^{(m+1)t}\cdot\dfrac{dx}{e^t} = x^m dx\right)$

449. $\int \dfrac{x^m}{\log x} dx = \int \dfrac{e^{-y}}{y} dy$ 但し $y = -(m+1)\log x$ これから $dy = -(m+1)\cdot\dfrac{dx}{x}$

$dx = -\dfrac{x}{m+1} dy$ また $\log x = -\dfrac{y}{m+1}$ $x = e^{-\frac{y}{m+1}}$

与式$=\int \dfrac{e^{-\frac{my}{m+1}}}{-\dfrac{y}{m+1}}\cdot\left(-\dfrac{xdy}{m+1}\right)=\int \dfrac{xe^{-\frac{my}{m+1}}}{y}dy=\int \dfrac{e^{-\frac{y}{m+1}}e^{-\frac{my}{m+1}}}{y}dy=\int \dfrac{e^{-y}}{y}dy$

450. $\int \dfrac{dx}{x\log x}=\int \dfrac{(\log x)'}{\log x}dx=\log(\log x)$

451. $\int \dfrac{(n-1)dx}{x(\log x)^n}$　$\log x=t$　とおくと　$x=e^t$　$dx=e^t dt$

与式$=(n-1)\int \dfrac{e^t dt}{e^t t^n}=(n-1)\int t^{-n}dt=-t^{-n+1}=-\dfrac{1}{(\log x)^{n-1}}$

452. $\int log(a^2+x^2)dx=x\log(a^2+x^2)-\int \dfrac{2x^2}{a^2+x^2}dx$

$=x\log(a^2+x^2)-2\int(1-\dfrac{a^2}{a^2+x^2})dx=x\log(a^2+x^2)-2x+2\int \dfrac{dx}{1+(x/a)^2}$

$\dfrac{x}{a}=\tan\theta$　とおくと　$dx=\dfrac{ad\theta}{\cos^2\theta}$　$\int \dfrac{dx}{1+(\frac{x}{a})^2}=\int \dfrac{\frac{ad\theta}{\cos^2\theta}}{1+\tan^2\theta}=a\theta=a\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$

従って　与式$=x\log(a^2+x^2)-2x+2a\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$

453. $\int (a+bx)^m \log xdx$　$a+bx=t$　とおくと　$x=\dfrac{t-a}{b}$　$dx=\dfrac{dt}{b}$　$dt=bdx$

$\log x=\log\dfrac{t-a}{b}=\log(t-a)-\log b$　　与式$=\int t^m\{\log(t-a)-\log b\}\dfrac{dt}{b}$

$=\dfrac{1}{b}\left\{\int t^m\log(t-a)dt-\log b\int t^m dt\right\}=\dfrac{1}{b(m+1)}\left[t^{m+1}\{\log(t-a)-\log b\}-\int \dfrac{t^{m+1}}{t-a}dt\right]$

$=\dfrac{1}{b(m+1)}\left[(a+bx)^{m+1}\log x-\int \dfrac{(a+bx)^{m+1}}{x}dx\right]$

454. $\int x^m\log(a+bx)dx$　以下 454～456 は 453. と同じ置き換えで

$=\dfrac{1}{b^{m+1}}\int (t-a)^m\log tdt=\dfrac{1}{b^{m+1}(m+1)}\left\{(t-a)^{m+1}\log t-\int \dfrac{(t-a)^{m+1}}{t}dt\right\}$

$$=\frac{1}{m+1}\left[x^{m+1}\log(a+bx)-b\int\frac{x^{m+1}}{a+bx}dx\right]$$

455. $\displaystyle\int\frac{\log xdx}{(a+bx)^m}=\frac{1}{b}\left\{\int t^{-m}\log(t-a)dt-\log b\int t^{-m}dt\right\}=\frac{1}{b}\left\{\int\ \frac{t^{-m-1}\log(t-a)}{-m+1}\right\}$

$$+\frac{1}{b}\left\{\frac{1}{m-1}\int\frac{t^{-m+1}dt}{t-a}-\log b\cdot\frac{t^{-m+1}}{-m+1}\right\}=\frac{1}{b(m-1)}\left\{\frac{\log b-\log(t-a)}{t^{m-1}}+\int\ \frac{dt}{t^{m-1}(t-a)}\right\}$$

$$=\frac{1}{b(m-1)}\left\{\frac{\log b-\log(t-a)}{t^{m-1}}+\int\ \frac{dt}{t^{m-1}(t-a)}\right\}$$

$$=\frac{1}{b(m-1)}\left\{-\frac{\log x}{(a+bx)^{m-1}}+\int\ \frac{dx}{x(a+bx)^{m-1}}\right\}$$

456. $\displaystyle\int\frac{\log xdx}{a+bx}=\frac{1}{b}\left\{\int\frac{\log(t-a)}{t}dt-\log b\int\frac{1}{t}dt\right\}=\frac{1}{b}\{\log t\log(t-a)-\log b\log t$

$$-\int\ \frac{\log tdt}{t-a}\Bigg\}=\frac{1}{b}\log x\log(a+bx)-\frac{1}{b}\int\frac{\log(a+bx)}{x}dx$$

457. $\displaystyle\int(a+bx)\log xdx$　453.で $m=1$ の時　これを使って

$$与式=\frac{1}{2b}\left\{(a+bx)^2\log x-\int\ \frac{(a+bx)^2dx}{x}\right\}\qquad ここで$$

$$\int\frac{(a+bx)^2}{x}dx=\int(\frac{a^2}{x}+2ab+b^2x)dx=a^2\log x+2abx+\frac{b^2x^2}{2}\ より）$$

$$=\frac{(a+bx)^2}{2b}\log x-\frac{a^2\log x}{2b}-ax-\frac{bx^2}{4}$$

458. $\displaystyle\int\frac{\log x}{\sqrt{a+bx}}dx$　$\sqrt{a+bx}=t$　とおくと　$x=\frac{1}{b}(t^2-a)$　$dx=\frac{2tdt}{b}$

$$\log x=\log(t^2-a)-\log b\qquad dt=\frac{bdx}{2t}$$

$$与式=\frac{2}{b}\int\{log(t^2-a)-\log b\}dt=\frac{2}{b}\left\{tlog(t^2-a)-t\log b-2\int\frac{t^2}{t^2-a}dt\right\}$$

$$=\frac{2}{b}\left[t(\log(t^2-a)-\log b)-2\int(1+\frac{a}{t^2-a})dt\right]$$

ここで　1）$a>0$ の時

$\int \frac{a}{t^2-a}dt$　は　$\frac{1}{2}(\frac{1}{t-\sqrt{a}}-\frac{1}{t+\sqrt{a}})=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{a}}{t^2-a}=\frac{\sqrt{a}}{t^2-a}$　より

$=\frac{2}{b}\{(\log x-2)\sqrt{a+bx}-2\cdot\frac{\sqrt{a}}{2}\int(\frac{1}{t-\sqrt{a}}-\frac{1}{t+\sqrt{a}})dt\}$

$=\frac{2}{b}\{(\log x-2)\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}\{\log(t-\sqrt{a})-\log(t+\sqrt{a})\}$

$=\frac{2}{b}[(\log x-2)\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}\log(\sqrt{a+bx}+\sqrt{a})-\sqrt{a}\log(\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}]$

2) $a<0$ の時　$\int\frac{a}{t^2-a}dt=\int\frac{adt}{t^2+(\sqrt{-a})^2}=\int\frac{-dt}{1+(\frac{t}{\sqrt{-a}})^2}=-\sqrt{-a}\int\frac{\frac{d\theta}{\cos^2\theta}}{1+\tan^2\theta}$

$=-\sqrt{-a}\int d\theta=-\sqrt{-a}\theta=-\sqrt{-a}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{-a}}$

（$\because \frac{t}{\sqrt{-a}}=\tan\theta$　とおいて　$\theta=\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{-a}}$　$t=\sqrt{-a}\tan\theta$　$dt=\frac{\sqrt{-a}d\theta}{\cos^2\theta}$）

従って　与式$=\frac{2}{b}\{(\log x-2)\sqrt{a+bx}+2\sqrt{-a}\tan^{-1}\sqrt{\frac{a+bx}{-a}}\}$

459.　$\int\sin\log x dx$　　460.　$\int\cos\log x dx$　　459. 460.は対で考える

$I=\int\sin\log x dx$　$J=\int\cos\log x dx$ として各々部分積分する。

$I=\int\sin\log x dx=x\sin\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}\cos\log x dx$

$=x\sin\log x-\int\cos\log x dx=x\sin\log x-J$　・・・・①

$J=\int\cos\log x dx=x\cos\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}(-\sin\log x)dx$

$=x\cos\log x+\int\sin\log x dx=x\cos\log x+I$　・・・・②

①＋②より　$J=\frac{1}{2}x(\sin\log x+\cos\log x)$　また　$I=\frac{1}{2}x(\sin\log x-\cos\log x)$

以　上