私の数学散歩道(4)

札幌市中央区　　村田　洋一

目　　　　　　　　次

積分　$I_7 = \int \frac{dx}{x^7 - 1}$　を電卓と筆算で計算しよう！

―私の数学散歩道(4)― 2010/06/20

積分 $I_7 = \int \frac{dx}{x^7 - 1}$ を電卓と筆算で計算してみよう！

札幌市中央区　　村田　洋一

1．はじめに

高校二年生なら $\int \frac{dx}{x^n}$ や $\int \frac{dx}{(x-1)^n}$ （n は正の整数）を求めるのは簡単である。

基本公式や簡単な置換積分で $\int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$ ，$\int \frac{dx}{(x-1)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x-1)^{n-1}}$ と

容易に計算することができる。

しかし $I_n = \int \frac{dx}{x^n - 1}$ として $n = 1, 2$ では $I_1 = \int \frac{dx}{x-1} = \log|x-1| + C_1, I_2 = \int \frac{dx}{x^2 - 1}$

$= \frac{1}{2}\int (\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1})dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C_2$ とやや複雑な初等超越関数になるが、それでも

容易に計算できる。（以降、積分定数の記載を省略する。）

$n = 3$ のときは直接積分できないので、分母を部分分数に分解して

$I_3 = \int \frac{dx}{x^3 - 1} = \int (\frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1})dx$ から未定係数法で a, b, c を決め、まだ容易に

計算できる。$n = 4$ のときは簡単であるが、$n = 5$ 以降 とくに n が奇数のときは特に

難しくなる。$n = 8$ まで 調べてみたが、$n = 7$ のときの複雑さは格別でこれを取り

あげてみた。

勿論考え方や途中の計算もいろいろあると思うが、つれづれなるままに計算したいへん

長い「私の数学散歩道」となった。　最後までご覧いただければ幸いである。

$n \le 8$ の整数（$n \ne 7$）の計算はできているが、冗長に過ぎるので割愛する。

2．積分実行のための部分分数への分解（第１段）

$x^7 - 1 = (x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ より

$\frac{1}{x^7 - 1} = \frac{p}{x-1} + \frac{qx^5 + rx^4 + sx^3 + tx^2 + ux + v}{x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}$ の部分分数分解を考える。

この右辺を通分したときの分子は

$$p(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) + (x-1)(qx^5 + rx^4 + sx^3 + tx^2 + ux + v)$$

$$= (p+q)x^6 + (p+r-q)x^5 + (p+s-r)x^4 + (p+t-s)x^3$$

$$+ (p+u-t)x^2 + (p+v-u)x^2 + p - v$$

係数比較して　$p + q = 0$　より　$q = -p$　次式への代入を繰り返して

$p + r - q = 0$　　$r = -2p$

$$
\begin{array}{ll}
p+s-r=0 & s=-3p \\
p+t-s=0 & t=-4p \\
p+u-t=0 & u=-5p \\
p+v-u=0 & v=-6p \\
p-v=1 & p-(-6p)=7p=1 \quad \text{より} \quad p=1/7
\end{array}
$$

これから　$p=1/7$,　$q=-1/7$,　$r=-2/7$,　$s=-3/7$,　$t=-4/7$

$u=-5/7$,　$v=-6/7$

従って

$$\frac{1}{x^7-1}=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x^5+2x^4+3x^3+4x^2+5x+6}{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}\right)$$　・・・（＊）となる。

3．部分分数への分解（第 2 段）

ここで、前記（＊）の第 2 項を更に部分分数分解することを考える。
第 2 項の分母の解を求め、それを基に因数分解を考える。

相反方程式であるから　$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$　の両辺を $x^3(\neq 0)$　で割って

$$(x^3+\frac{1}{x^3})+(x^2+\frac{1}{x^2})+(x+\frac{1}{x})+1=0$$

$x+\dfrac{1}{x}=t$　と　置いて　整理すると　$t^3+t^2-2t-1=0$　　・・・・(1)

左辺を　$f(t)$　として　$f'(t)=3t^2+2t-2=0$　から　$t=\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}$　で極大値

$\dfrac{7}{27}(2\sqrt{7}-1)$,　$t=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$　で極小値　$-\dfrac{7}{27}(2\sqrt{7}+1)$　を　とる。

3 つの解を各々　t_1,t_2,t_3（$t_3<t_2<t_1$）とすると　$f(-2)\cdot f(-1)<0,\ \ f(-1)\cdot f(0)<0$,
$f(1)\cdot f(2)<0$　より　$-2<t_3<-1,\ \ -1<t_2<0,\ \ 1<t_1<2$　で t　は実数解となる。

これから　$|t|<2$　で、　x　は 6 個の複素数解を持つが、実数の範囲で因数分解できれば

十分で　$x+\dfrac{1}{x}=t_1$,　$x+\dfrac{1}{x}=t_2$,　$x+\dfrac{1}{x}=t_3$ から分母は x^2-t_1x+1,　x^2-t_2x+1,

x^2-t_3x+1　を因数とすれば良い。

当然 解と係数の関係から

$$t_1+t_2+t_3=-1,\quad t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=-2,\quad t_1t_2t_3=1$$　・・・・(2)

で、このあとは (1),(2)の条件を考え、議論を進めていけば良い。

従って　$\dfrac{x^5+2x^4+3x^3+4x^2+5x+6}{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}=\dfrac{ax+b}{x^2-t_1x+1}+\dfrac{cx+d}{x^2-t_2x+1}+\dfrac{ex+f}{x^2-t_3x+1}$

とおけるから、未定係数法でa,b,c,d,e,f　を決めるとよい。

右辺の分子＝$(ax+b)(x^2-t_2x+1)(x^2-t_3x+1)$

$$+(cx+d)(x^2-t_3x+1)(x^2-t_1x+1)+(ex+f)(x^2-t_1x+1)(x^2-t_2x+1)$$

$$=x^5+2x^4+3x^3+4x^2+5x+6$$

最初の項を計算して

$$(ax+b)(x^2-t_2x+1)(x^2-t_3x+1)=ax^5+\{b-a(t_2+t_3)\}x^4$$

$$+\{a(2+t_2t_3)-b(t_2+t_3)\}x^3+\{b(2+t_2t_3)-a(t_2+t_3)\}x^2+\{a-b(t_2+t_3)\}x+b$$

第２項、第３項 をサイクリックに書き下して

$$(cx+d)(x^2-t_3x+1)(x^2-t_1x+1)=cx^5+\{d-c(t_3+t_1)\}x^4$$

$$+\{c(2+t_3t_1)-d(t_3+t_1)\}x^3+\{d(2+t_3t_1)-c(t_3+t_1)\}x^2+\{c-d(t_3+t_1)\}x+d$$

$$(ex+f)(x^2-t_1x+1)(x^2-t_2x+1)=ex^5+\{f-e(t_1+t_2)\}x^4$$
$$+\{e(2+t_1t_2)-f(t_1+t_2)\}x^3+\{f(2+t_1t_2)-e(t_1+t_2)\}x^2+\{e-f(t_1+t_2)\}x+f$$

これらを加えて

$$(a+c+e)x^5+\{(b+d+f)+a(1+t_1)+c(1+t_2)+e(1+t_3)\}x^4$$

$$+\{2(a+c+e)+at_2t_3+ct_3t_1+et_1t_2+b(1+t_1)+d(1+t_2)+f(1+t_3)\}x^3$$

$$+\{2(b+d+f)+bt_2t_3+dt_3t_1+ft_1t_2+a(1+t_1)+c(1+t_2)+e(1+t_3)\}x^2$$

$$+\{(a+c+e)+b(1+t_1)+d(1+t_2)+f(1+t_3)\}x+(b+d+f)$$
$$=x^5+2x^4+3x^3+4x^2+5x+6$$

係数比較して整理すると

$b+d+f=6$　　$bt_1+dt_2+ft_3=-2$　　$bt_2t_3+dt_3t_1+ft_1t_2=-4$　　・・・(A)

$a+c+e=1$　　$at_1+ct_2+et_3=-5$　　$at_2t_3+ct_3t_1+et_1t_2=-3$　　・・・(B)

4. 前記(A)の連立方程式を解く

第１ 式より　$f=6-b-d$　これを第２式、第３式に代入し整理

$$t_2(t_3-t_1)b+t_1(t_3-t_2)d=-4-6t_1t_2 \quad \cdots ①$$

$$(t_1-t_3)b+(t_2-t_3)d=-2-6t_3 \quad \cdots ②$$

①＋②×t_2 から

$$\{t_1(t_3-t_2)+t_2(t_2-t_3)\}d=-4-6t_1t_2-2t_2-6t_2t_3$$

左辺＝$t_3t_1-(t_1t_2+t_2t_3)+t_2{}^2=t_3t_1-(-2-t_3t_1)+t_2{}^2=t_2{}^2+\dfrac{2}{t_2}+2$

右辺＝$-4-6(t_1t_2+t_2t_3)-2t_2=-2t_2-6(-2-t_3t_1)-4=-2t_2+\dfrac{6}{t_2}+8$

従って　$d=\dfrac{-2(t_2{}^2-4t_2-3)}{t_2{}^3+2t_2+2}$

同様に　①＋②×t_1 から

$$\{t_2(t_3-t_1)+t_1(t_1-t_3)\}b=-4-6t_1t_2-2t_1-6t_1t_3$$

$$(t_1{}^2+\frac{2}{t_1}+2)b=-2t_1+\frac{6}{t_1}+8 \qquad b=\frac{-2(t_1{}^2-4t_1-3)}{t_1{}^3+2t_1+2}$$

b,d を(A) の第２式に代入して

$$\frac{-2t_1(t_1{}^2-4t_1-3)}{t_1{}^3+2t_1+2}+\frac{-2t_2(t_2{}^2-4t_2-3)}{t_2{}^3+2t_2+2}+ft_3=-2$$

ここで (1)より　$t^3+t^2-2t-1=0$

従って　$t_1{}^3+2t_1+2=-(t_1{}^2-4t_1-3)$,　$t_2{}^3+2t_2+2=-(t_2{}^2-4t_2-3)$ から

上式は　$2t_1+2t_2+ft_3=-2$

$$ft_3=-2-2(t_1+t_2)=-2-2(-1-t_3)=2t_3$$

$t_3\neq 0$　より　$f=2$

$d=6-(b+f)=4-b$　を(A) の第２式に代入して

$$bt_1+(4-b)t_2+2t_3=-2 \qquad b(t_2-t_1)=2+2t_3+4t_2 \quad \cdots ③$$

同様に(A) の第３式に代入，整理して

$$bt_2t_3+(4-b)t_3t_1=-4-2t_1t_2 \qquad bt_3(t_2-t_1)-4-2t_1t_2-4t_3t_1 \quad \cdots ④$$

③×t_3＋④ から

$$2bt_3(t_2-t_1)=2t_3+2t_3{}^2+4t_2t_3-4-2t_1t_2-4t_3t_1$$

$$=2t_3+2t_3{}^2+4t_2t_3+2(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1)-2t_1t_2-4t_3t_1$$

$$=2t_3(1+t_3-t_1+3t_2)=2t_3(1-1-t_2-t_1-t_1+3t_2)=4t_3(t_2-t_1)$$

$t_3 \neq 0,\quad t_2 \neq t_1$ より　$b=2$　　これから $d=4-b=2$

5．前記(B)の連立方程式を解く

第１式より　$e=1-a-c$　これを第２式、第３式に代入して

$$at_1+ct_2+(1-a-c)t_3=-5$$

第１式を整理して

$$(t_1-t_3)a+(t_2-t_3)c=-5-t_3 \qquad ・・・⑤$$

第２式より同様に

$$t_2(t_3-t_1)a+t_1(t_3-t_2)c=-3-t_1t_2 \qquad ・・・⑥$$

⑤×t_1＋⑥ から

（$(t_2-t_1)(t_3-t_1)a=-3-t_1t_2-t_3t_1-5t_1$

左辺の係数＝$t_2t_3-(t_1t_2+t_3t_1)+t_1{}^2=t_2t_3-(-2-t_2t_3)+t_1{}^2$

$$=2t_2t_3+2+t_1{}^2=\frac{2}{t_1}+t_1{}^2+2$$

右辺の係数＝$-3-(-2-t_2t_3)-5t_1=-1+\dfrac{1}{t_1}-5t_1$

よって　$a=\dfrac{-5t_1{}^2-t_1+1}{t_1{}^3+2t_1+2}$　　c を求めるため　⑤×t_2＋⑥ を作ると

$$(t_2-t_1)(t_2-t_3)c=-3-t_1t_2-t_2t_3-5t_2$$

上記同様の計算で　$c=\dfrac{-5t_2{}^2-t_2+1}{t_2{}^3+2t_2+2}$　また　$a=1-c-e$

これを第２式、第３式に代入して

$$(t_2-t_1)c+(t_3-t_1)e=-5-t_1 \qquad ・・・⑦$$

$$t_3(t_1-t_2)c+t_2(t_1-t_3)e=-3-t_2t_3 \qquad ・・・⑧$$

⑦×t_3＋⑧ から

$$(t_3-t_1)(t_3-t_2)e=-5t_3-t_1t_3-t_2t_3-3$$

これから $e=\dfrac{-5t_3{}^2-t_3+1}{t_3{}^3+2t_3+2}$, $a=\dfrac{-5t_1{}^2-t_1+1}{t_1{}^3+2t_1+2}$, $c=\dfrac{-5t_2{}^2-t_2+1}{t_2{}^3+2t_2+2}$ となり

$a=f(t_1)$, $c=f(t_2)$, $e=f(t_3)$ と置くと

$$\frac{1}{x^7-1}=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{f(t_1)x+2}{x^2-t_1x+1}-\frac{f(t_2)x+2}{x^2-t_2x+1}-\frac{f(t_3)x+2}{x^2-t_3x+1}\right)\quad\cdot\cdot\cdot\cdot\qquad(3)$$

と部分分数に分解される。

ここで $t^3+t^2-2t-1=0$ すなわち t_1,t_2,t_3 は

$t_1+t_2+t_3=-1,\quad t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=-2,\quad t_1t_2t_3=1$ を満たす定数である。

6．積分実行への更なる準備

例えば、(3)の右辺第２項は $\dfrac{f(t_1)x+2}{x^2-t_1x+1}=\dfrac{1}{2}f(t_1)\displaystyle\int\frac{2x-t+t+\dfrac{4}{f(t_1)}}{x^2-t_1x+1}dx$

$$=\frac{1}{2}f(t_1)\int\frac{2x-t_1}{x^2-t_1x+1}dx+(2+\frac{1}{2}t_1f(t_1))\int\frac{dx}{x^2-t_1x+1}$$

この式の第１項の積分は $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|$, 第２項は $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-\frac{t_1}{2})^2+(\sqrt{1-\frac{t^2}{4}})^2}$

で容易に積分可能である。従って求める積分

$$I_7=\int\frac{dx}{x^7-1}=\frac{1}{7}\left\{\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{f(t_1)x+2}{x^2-t_1x+1}-\frac{f(t_2)x+2}{x^2-t_2x+1}-\frac{f(t_3)x+2}{x^2-t_3x+1}\right)dx\right\}$$

$$=\frac{1}{7}\Big\{\log|x-1|-\frac{1}{2}f(t_1)\log(x^2-t_1x+1)-(2+\frac{1}{2}t_1f(t_1))\int\frac{dx}{x^2-t_1x+1}$$

$$-\frac{1}{2}f(t_2)\log(x^2-t_2x+1)-(2+\frac{1}{2}t_2f(t_2))\int\frac{dx}{x^2-t_2x+1}$$

$$-\frac{1}{2}f(t_3)\log(x^2-t_3x+1)-(2+\frac{1}{2}t_3f(t_3))\int\frac{dx}{x^2-t_3x+1}\Big\}\quad\cdot\cdot\cdot(4)$$

という式を導くことができる。

7．方程式 $t^3+t^2-2t-1=0$ を解き t_1,t_2,t_3 を求める

(4)式では具体的に定積分などを計算できない、というのであればホーナーの方法で3次方程式を解き t_1,t_2,t_3 を求めてみよう。

$t^3+t^2-2t-1=0$ 　左辺を $g(t)$ と置くと $g'(t)=3t^2+2t-2$

2頁の分析から $-2<t_3<-1,\ -1<t_2<0,\ 1<t_1<2$

（t_1 の計算）

近似解を α_0 とすると $\alpha_1=\alpha_0-\dfrac{g(\alpha_0)}{g'(\alpha_0)}$

t_1 を求めるに $\alpha_0=2$ として $g(2)=7,\quad g'(2)=14$

$$\alpha_1=2-\frac{7}{14}=\frac{3}{2}$$

$$g(\frac{3}{2})=\frac{27}{8}+\frac{9}{4}-3-1=\frac{13}{8},\quad g'(\frac{3}{2})=\frac{27}{4}+3-2=\frac{31}{4}$$

$$\alpha_2=\frac{3}{2}-\frac{\frac{13}{8}}{\frac{31}{4}}=\frac{40}{31}=1.2903$$ 以下、$\alpha_n,\ g(\alpha_n),\ g'(\alpha_n)$ をの各々を小数第4位

まで とって計算する。 $g(\frac{40}{31})=\frac{64000}{29791}+\frac{1600}{961}-\frac{80}{31}-1=0.2325$

$$g'(\frac{40}{31})=\frac{4800}{961}+\frac{80}{31}-2=5.5753$$

$$\alpha_3=1.2903-\frac{0.2325}{5.5753}=1.2486$$

$$g(1.2486)=1.9465+1.5590-2.4972-1=0.0083$$

$$g'(1.2486)=4.6770+2.4972-2=5.1742$$

$$\alpha_4=1.2486-\frac{0.0083}{5.1742}=1.2470$$

検算のため $g(\alpha_4)$ を計算してみると

$g(\alpha_4)=1.9390+1.5550-2.4940-1=0$ 　よって $t_1=1.2470$

（t_2 の計算）

次に t_2 を求める。$\alpha_0=0$ とする。$g(0)=-1,\quad g'(0)=-2$

$$\alpha_1=0-\frac{(-1)}{(-2)}=-\frac{1}{2}$$

$$g(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 1 - 1 = \frac{1}{8} \qquad g'(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - 1 - 2 = -\frac{9}{4}$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} - \frac{(-\frac{1}{8})}{(-\frac{9}{4})} = -\frac{4}{9}$$

$$g(-\frac{4}{9}) = -\frac{64}{729} + \frac{16}{81} + \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{729} \qquad g'(-\frac{4}{9}) = \frac{48}{81} - \frac{8}{9} - 2 = -\frac{62}{27}$$

$$\alpha_3 = -\frac{4}{9} - \frac{(-\frac{1}{729})}{(-\frac{62}{27})} = -0.4444 - 0.0006 = -0.4450$$

検算のため $g(\alpha_3)$ を計算してみると

$g(-0.4450) = -0.0881 + 0.1980 + 0.8900 - 1 = -0,0001$ 　　よって　$t_2 = -0.4450$

（t_3 の計算）

$t_1 + t_2 + t_3 = -1$ より $t_3 = -1 - t_1 - t_2 = -1.8020$

$t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = -2,.0001$

$t_1 t_2 t_3 = -0.9999$

従って　$t_1 = 1.2470$，$t_2 = -0.4450$，$t_3 = -1.8020$ が求める解である。

8．積分の係数の簡略化と求める積分の形

これら t_1, t_2, t_3 の値から $f(t_1)$，$f(t_2)$，$f(t_3)$ の値を求めてみよう。

$$f(t_1) = \frac{-5{t_1}^2 - t_1 + 1}{{t_1}^3 + 2t_1 + 2} = \frac{-7.7750 - 1.2470 + 1}{1.9390 + 2.4940 + 2} = \frac{-8.022}{6.433} = -1.2470 = t_1 \quad で$$

$$f(t_2) = \frac{-5{t_2}^2 - t_2 + 1}{{t_2}^3 + 2t_2 + 2} = \frac{0.4548}{1.0219} = 0.4450 = t_2$$

これらのことから　$f(t_1) = -t_1$，　$f(t_2) = -t_2$　が成立しそうである。

もし $f(t) = -t$ なら $\dfrac{-5t^2 - t + 1}{t^3 + 2t + 2} = -t$ から

$-5t^2 - t + 1 = -t^4 - 2t^2 - 2t$ 　　・・・・(5)

$t^3 = -t^2 + 2t + 1$ 　であるから

（5）式右辺＝　$-t(-t^2+2t+1)-2t^2-2t=t^3-4t^2-3t=-5t^2-t+1$

従って　一般に　$\dfrac{-5t^2-t+1}{t^3+2t+2}=-t$　が成り立つ。

また(4)式の次の積分は

$$-(2+\frac{1}{2}tf(t))\int\frac{dx}{x^2-tx+1}=-(2-\frac{1}{2}t^2)\int\frac{dx}{(x-\frac{t}{2})^2+(\sqrt{1-\frac{t^2}{4}})^2}\quad\cdot\cdot\cdot\cdot(6)$$

ここで $x-\dfrac{t}{2}=\sqrt{1-\dfrac{t^2}{4}}\tan\theta$　とおくと　$dx=\dfrac{\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}}{\cos^2\theta}d\theta$

$\tan\theta=\dfrac{x-\frac{t}{2}}{\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}}$　　$\theta=\tan^{-1}\dfrac{x-\frac{t}{2}}{\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}}$　であるから

(6)式は　$-(2-\dfrac{1}{2}t^2)\displaystyle\int\frac{\frac{\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}}{\cos^2\theta}}{(1-\frac{t^2}{4})(1+\tan^2\theta)}d\theta=-\frac{2-\frac{1}{2}t^2}{\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}}\int d\theta$

$$=-\frac{2-\frac{1}{2}t^2}{\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}}\tan^{-1}\frac{x-\frac{t}{2}}{\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}}=-\sqrt{4-t^2}\tan^{-1}\frac{2x-t}{\sqrt{4-t^2}}$$

従って (4)式は次のようになり、これが求める積分の一般の形である。

$$I_7=\frac{1}{7}\{\ \log|x-1|+\frac{1}{2}t_1\log(x^2-t_1x+1)-\sqrt{4-t_1{}^2}\tan^{-1}\frac{2x-t_1}{\sqrt{4-t_1{}^2}}$$

$$+\frac{1}{2}t_2\log(x^2-t_2x+1)-\sqrt{4-t_2{}^2}\tan^{-1}\frac{2x-t_2}{\sqrt{4-t_2{}^2}}$$

$$+\frac{1}{2}t_3\log(x^2-t_3x+1)-\sqrt{4-t_3{}^2}\tan^{-1}\frac{2x-t_3}{\sqrt{4-t_3{}^2}}\quad\}\cdot\cdot\cdot(7)$$

但し　$t_1\sim t_3$　は３次方程式　$t^3+t^2-2t-1=0$　の３つの解で

$t_1+t_2+t_3=-1,\quad t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=-2,\quad t_1t_2t_3=1$　である。

９．(7) で求まった I_7 が正しいかどうか、I_7 を微分し検算する

$$I_7=\frac{1}{7}\Big\{\ \log|x-1|+\frac{1}{2}t_1\log(x^2-t_1x+1)-\sqrt{4-t_1{}^2}\tan^{-1}\frac{2x-t_1}{\sqrt{4-t_1{}^2}}$$

$$+\frac{1}{2}t_2\log(x^2-t_2x+1)-\sqrt{4-t_2{}^2}\tan^{-1}\frac{2x-t_2}{\sqrt{4-t_2{}^2}}$$

$$+\frac{1}{2}t_3\log(x^2-t_3x+1)-\sqrt{4-t_3{}^2}\tan^{-1}\frac{2x-t_3}{\sqrt{4-t_3{}^2}}\ \Big\}$$

但し、$t_1+t_2+t_3=-1,\quad t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=-2,\quad t_1t_2t_3=1$

I_7 を 項別に微分する。2,4,6 行及び 3,5,7 行は各添え字を t で代表させ

第 1 項は $\quad \dfrac{d}{dx}\{\log|x-1|\}=\dfrac{1}{x-1}$

第 2,4,6 項は $\quad \dfrac{d}{dx}\Big\{\ \dfrac{1}{2}t\log(x^2-tx+1)\ \Big\}=\dfrac{tx-\dfrac{t^2}{2}}{x^2-tx+1}$

第 3,5,7 項は $\quad \dfrac{d}{dx}\left\{-\sqrt{4-t^2}\tan^{-1}\dfrac{2x-t}{\sqrt{4-t^2}}\right\}=-\sqrt{4-t^2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{(2x-t)^2}{4-t^2}}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{4-t^2}}$

$$=\frac{-2(4-t^2)}{4-t^2+(2x-t)^2}=\frac{t^2/2-2}{x^2-tx+1}$$

後の 2 式を加えると

$$\frac{tx-t^2/2}{x^2-tx+1}+\frac{t^2/2-2}{x^2-tx+1}=\frac{tx-2}{x^2-tx+1}$$

t_1〜t_3 について動かすと $\quad \dfrac{tx_1-2}{x^2-t_1x+1}+\dfrac{t_2x-2}{x^2-t_2x+1}+\dfrac{tx_3-2}{x^2-t_3x+1}\quad$ ・・・(7)

(7)で通分した時の分母は、2 頁の議論から $\quad x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

分子の第 1 項は

$$(t_1x-2)(x^2-t_2x+1)(x^2-t_3x+1)=t_1x^5-(t_1t_2+t_3t_1+2)x^4+\{2(t_1+t_2+t_3)+t_1t_2t_3\}x^3$$

$$-\{(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1)+t_2t_3+4\}x^2+\{(t_1+t_2+t_3)+(t_2+t_3)\}x-2$$

この式をサイクリックに置き換え、その和をとると

$$(t_1x-2)(x^2-t_2x+1)(x^2-t_3x+1)+(t_2x-2)(x^2-t_3x+1)(x^2-t_1x+1)$$

$$+(t_3x-2)(x^2-t_1x+1)(x^2-t_2x+1)=(t_1+t_2+t_3)x^5+\{2(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1)+6\}x^4$$

$$+\{6(t_1+t_2+t_3)+3t_1t_2t_3\}x^3-\{4(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1)+12\}x^2+5(t_1+t_2+t_3)x-6$$

$$=-x^5-2x^4-3x^3-4x^2-5x-6=-(x^5+2x^4+3x^3+4x^2+5x+6)$$

これから

$$I_7{}'=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x^5+2x^4+3x^3+4x^2+5x+6}{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}-\right)$$

$$=\frac{(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)-(x-1)(x^5+2x^4+3x^3+4x^2+5x+6)}{7(x^7-1)}=\frac{1}{x^7-1}$$

で、(7)の I_7 が正しいことが証明された。

10. おわりに

$I_n=\int\frac{dx}{x^n-1}$ の形の積分に興味を持ち、$1\le n\le 8$ の範囲を考えてみた。

ガウスがすべての 1 変数の整係数の代数方程式は 1 次と 2 次の因数に分解できることを証明しているので、第 2 段での部分分数への分解にあたり I_5 で 2 次方程式、I_7 で 3 次方程式・・・、一般に I_{2n-1} $(n\ge 3$ の整数〉では $(n-1)$ 次方程式となり積分可能と考えられるからである。また I_{2n} $(n\ge 3$ の整数〉についても前記とほぼ同様に考えることができる、と推定している。

しかし x, n, t_n を含んだ(7) 式のような形での一般的な定式化は難しい、と思う。諸先生にご教示いただければ幸甚です。

以　上