06. 7.15

私　の　数　学　散　歩　道 (2)

～新作問題と解答：三角関数との融合を視点に～

横浜市 西区　　村田　洋一

1. はじめに

前回の「私の数学散歩道」では～関数 $f_n(x)=\sin^n x+\cos^n x$（$0<x<\pi/2$、nは整数）の変域についての 6 個の証明と $f_n(x)$の特徴、数学上の美～ を述べた。

今回は前回との絡みから三角関数をいろいろ取り上げ問題を考えたこともあり、上記の副題の通りとした。

さて我々が三角関数の入り口としての三角比を学習したのは中学三年生のときと記憶している。それを学習して、当時これと言った印象は持たなかったと思うが、高校入学後再び接したときには覚えるべき公式や定義等が多いのに驚かされた。

負角・余角や補角の公式、倍・三倍角の公式、加法定理、和積公式に積和公式、合成公式、正弦法則・余弦法則、三角形や四角形の面積公式など枚挙に暇がない。

しかしある程度時間をかけて理解してしまうと面白さが見えてきた。
$-1\le\sin x\le1$　$-1\le\cos x\le1$　の値域を持つ基本的な関数が $\tan x$ ほかと連携して通常の変数 x のように自由に変化していく様は見ていて楽しい。

社会人になってからも、また定年まで数年残し早期退職し転職した今も、時間を見つけ数学を勉強し続けているのもこの点からかも知れない。

本稿では今年になって考えた新作の三角関数に関する問題の中から 6 題選び載せる事にした。　掲載の基準は単なる計算や三角関数の基本知識で解ける問題にとどまらず、三角関数との融合問題をできるだけ取り上げた。

三角関数と微分、積分、方程式、不等式などとの融合である。
このような問題を、様々な方向から多面的に考える癖をつけることは、必ずや学習者の「数学力」の向上につながると確信している。

その意味で「別解」も当方が気づいた範囲で掲げておいた。

体裁は 最初に （問題篇） とし 6 題全部を一覧で示し、次に （解答篇］ として問題と解答（一部に「別解」を含む）を問題の掲載順序で載せている。

また問題は三角関数そのものにしてもそんなに易しくはなく、通常の大学受験レベルで授業等の一助として参考にしていただければ幸いである。

２．問題篇

以下、問題を一括提示する。　結構骨のある問題が多いと思うが、学習者が力試し等で臨む場合、問題各々につき 30 分はかけて解いて見ることをお勧めする。

解答篇は次頁以降を参照願いたい。

問題 1.　関数 $f(\theta)=\tan\dfrac{\theta}{2}+\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$ $(0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$ について次の問いに答えよ。

(1)　$f(\theta)$ を $\tan\dfrac{\theta}{2}$ の式で表せ。

(2)　$f(\theta)$ の最小値とその時の θ の値を求めよ。

問題 2.　$f(x)=2\sin^2\dfrac{x}{2}+\int_0^x f(t)\sin(x-t)dt+1$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

問題 3.　$t=\cos x-\sin x$（$0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$) とする。

(1) t の変域を求めよ。

(2) $\cos^2 x-\sin^2 x$, $\cos^3 x-\sin^3 x$, $\cos^4 x-\sin^4 x$ の取り得る範囲を求めよ。

(3) $-1\leq\cos^n x-\sin^n x\leq 1$ が成り立つことを証明せよ。

問題 4.　第一象限で.半直線 l の x 軸となす角 θ を三等分する半直線 l_1,l_2 がある。

また半直線 l 上の点を P（9,13）とし、半直線の傾きは $l_1<l_2$ とする、

(1)　l_1, l_2 の方程式を求めよ。

(2)　三つの三角形の面積比 $S_1:S_2:S_3$ を最も簡単な整数の比で求めよ。

問題 5.　$\cos C=\dfrac{\cos A+\cos B}{\sin A+\sin B}$（但し $A\neq B$, $A+B+C=\pi$）のとき、C は $\dfrac{\pi}{4}<C<\dfrac{\pi}{3}$ を満たす定数でただ一つに限ることを証明せよ。

問題 6.　$A+B+C=\pi$, $A\neq B$ のとき

等式　$\cot\dfrac{C}{2}=\dfrac{2(\cos B+\cos A)(\cos B-\cos A)}{\sin 2A-\sin 2B+2\sin(A-B)}$ を証明せよ。

３．解答篇

問題 1．関数　$f(\theta)=\tan\dfrac{\theta}{2}+\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$　（$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$）について次の問いに答えよ。

⑴　$f(\theta)$ を　$\tan\dfrac{\theta}{2}$　の式で表わせ。

⑵　$f(\theta)$　の最小値とその時の　θ　の値を求めよ。

解）

⑴ $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\sqrt{\dfrac{(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})^2}{(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2})^2}}=\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\theta\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}=\dfrac{1-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}$

（ ∵　$\cos\dfrac{\theta}{2}>\sin\dfrac{\theta}{2}(0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{4})$、$\cos\dfrac{\theta}{2}\neq 0$　）

$$\therefore\quad f(\theta)=\frac{1-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}+\frac{\tan\frac{\theta}{2}(1+\tan\frac{\theta}{2})}{1+\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}$$　（答）

⑵　$0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{4}$　より　$0<\tan\dfrac{\theta}{2}<1$　　$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$　とおくと　$f(t)=\dfrac{1+t^2}{1+t}$

$$f'(t)=\frac{2t(1+t)-(1+t^2)}{(1+t)^2}=\frac{t^2+2t-1}{(t+1)^2}$$

$t^2+2t-1=0$　より　$t=-1\pm\sqrt{2}$　　$0<t<1$　より　$t=\sqrt{2}-1$

t	(0)		$\sqrt{2}-1$		(1)
$f'(t)$		(−)	0	(＋)	
$f(t)$	(1)	減	$2(\sqrt{2}-1)$	増	(1)

従って　$\tan\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{2}-1$　のとき、$f(\theta)$ は最小値 $2(\sqrt{2}-1)$ をとる。

その時の θ は　$\tan\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=1$　　∴　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

（答）　$\theta=\pi/4$ のとき $f(\theta)$ は最小値 $2(\sqrt{2}-1)$ をとる。

(2) の別解）

$$f(t)=\frac{1+t^2}{1+t}\quad=t-1+\frac{2}{t+1}=t+1+\frac{2}{t+1}-2\geq 2\sqrt{(t+1)\cdot\frac{2}{t+1}}-2=2(\sqrt{2}-1)$$

($\because$　$t+1>1>0$ より　相加・相乗平均の関係から)

そのときの t は　$t+1=\dfrac{2}{t+1}$ より　$t^2+2t-1=0$　以下は上記の解と同様

注）(1) 式の変形の前段は下記の方が自然と思われる。

$$\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\sqrt{\frac{1-\sin^2\theta}{(1+\sin\theta)^2}}=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2})^2}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}$$

問題 2.　$f(x)=2\sin^2\dfrac{x}{2}+\displaystyle\int_0^x f(t)\sin(x-t)dt+1$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

解）

$\cos 2x=1-2\sin^2 x$ より　$2\sin^2 x=1-\cos 2x$　$\therefore$　$2\sin^2\dfrac{x}{2}=1-\cos x$

これから　$f(x)=2-\cos x+\displaystyle\int_0^x f(t)(\sin x\cos t-\cos x\sin t)dt$

$$=2-\cos x+\sin x\int_0^x f(t)\cos t dt-\cos x\int_0^x f(t)\sin t dt \quad \text{--------①}$$

①の両辺を x で 微分して

$$f'(x)=\sin x+\cos x\int_0^x f(t)\cos t dt+\sin x\cos x\ f(x)+\sin x\int_0^x f(t)\sin t dt$$

$$-\cos x\sin x\ f(x)=\sin x+\cos x\int_0^x f(t)\cos t dt+\sin x\int_0^x f(t)\sin t dt \quad \text{-------②}$$

②をさらに x で 微分して

$$f''(x)=\cos x-\sin x\int_0^x f(t)\cos t dt+\cos^2 x\ f(x)+\cos x\int_0^x f(t)\sin t dt+\sin^2 x\ f(x)$$

$$=\cos x+f(x)-\sin x\int_0^x f(t)\cos t dt+\cos x\int_0^x f(t)\sin t dt \quad \text{-------③}$$

③に①を代入して

$$f''(x)=\cos x+2-\cos x+\sin x\int_0^x f(t)\cos t dt-\cos x\int_0^x f(t)\sin t dt$$

$$-\sin x\int_0^x f(t)\cos t dt+\cos x\int_0^x f(t)\sin t dt=2$$

$f''(x)=2$ より　$f'(x)=2x+C_1$

②より　$f'(0)=0$　$\therefore$　$C_1=0$

$f'(x)=2x$　$f(x)=x^2+C_2$

①より　$f(0)=2-1=1$　$C_2=1$ から　$f(x)=x^2+1$

(答)　$f(x)=x^2+1$

問題 3.　$t=\cos x-\sin x$　$(0\le x\le \frac{\pi}{2})$　とする。

(1)　t　の変域を求めよ。

(2)　$\cos^2 x-\sin^2 x$，$\cos^3 x-\sin^3 x$，$\cos^4 x-\sin^4 x$　の取り得る範囲を求めよ。

(3)　$-1\le \cos^n x-\sin^n x\le 1$　が成り立つことを証明せよ。

解）

(1)　$t=\sqrt{2}\cos(x+\pi/4)$　この曲線は　$0\le x\le \pi/2$　で減少

$x=0\to t=1$、$x=\pi/4\to 0$、$x=\pi/2\to -1$　（答）$-1\le t\le 1$

(2)　$f_n(t)=\cos^n x-\sin^n x$　とおく。$f_2(t)=\cos 2x$　（答）$-1\le f_2(t)\le 1$

$\cos x-\sin x=t$　から　$t^2=1-2\sin x\cos x$　(1)より　$\sin x\cos x=(1-t^2)/2\ge 0$

$f_3(t)=\cos^3 x-\sin^3 x=(\cos x-\sin x)(\cos^2 x+\cos x\sin x+\sin^2 x))$

$=t(1+\dfrac{1-t^2}{2})=-\dfrac{1}{2}t^3+\dfrac{3}{2}t$　$f_3'(t)=-\dfrac{3}{2}(t+1)(t-1)\ge 0$ から

$-1=f_3(-1)\le f_3(t)\le f_3(1)=1$　（答）$-1\le f_3(t)\le 1$

$f_4(t)=\cos^4 x-\sin^4 x=(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)=t\sqrt{2-t^2}$

（$\because$　$(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$　より　$\sin x+\cos x=\sqrt{2-t^2}$　）

$f_4'(t)=\sqrt{2-t^2}-t^2/\sqrt{2-t^2}=2(1-t^2)/\sqrt{2-t^2}\ge 0$ より

$-1=f_4(-1)\le f_4(t)\le f_4(1)=1$　（答）$-1\le f_4(t)\le 1$

(3)　$|\cos^n x-\sin^n x|\le 1$　を二段構えの数学的帰納法で証明する。

1)　$n=1, 2$　のときは、(1),(2) の結果から成り立つ。

2)　$n=k,k+1$　のとき成り立つとすると

$\left|\ \cos^k x-\sin^k x\ \right| \le 1 \qquad \left|\ \cos^{k+1} x-\sin^{k+1} x\ \right| \le 1$

$\therefore\ \left|\ \cos^{k+2} x-\sin^{k+2} x\ \right| = \left|\ (\cos x+\sin x)(\cos^{k+1} x-\sin^{k+1} x)-\sin x\cos x \times\right.$

$\left.(\cos^k x-\sin^k x)\ \right| \le \left|(\cos x+\sin x)-\sin x\cos x\right|$

いま　$f(x)=\cos x+\sin x-\sin x\cos x$　とすると

$f'(x)=\cos x-\sin x-(\cos^2 x-\sin^2 x)=(\cos x-\sin x)\left\{\ 1-(\cos x+\sin x)\ \right\}$

$1\le\cos x+\sin x\le\sqrt{2}$　より　第２項は≤ 0　これから $f(x)$ は$0\le x\le\pi/4$ で減少、

$\pi/4\le x\le\pi/2$ で増加のため　$x=\pi/4$　で極小値は$\sqrt{2}-1/2$　となる。

$\therefore\quad \sqrt{2}-1/2=f(\pi/4)\le f(x)\le f(0)=f(\pi/2)=1 \qquad f(x)>0$　より

$\left|\ \cos^{k+2} x-\sin^{k+2} x\ \right|\le\cos x+\sin x-\sin x\cos x\le 1$で　$n=k+2$　のとき成立する。

1)、2)から,与えられた不等式はすべての自然数について成り立つ。　Q.E.D

(2)の別解)

$f_3(x)=\cos^3 x-\sin^3 x$　とおくと　$f_3'(x)=-3\sin x\cos x(\sin x+\cos x)=0$

$1\le\sin x+\cos x\le\sqrt{2}$　より　極値を与える　xは　$0,\ \pi/2$

$0\le x\le\pi/2$　で減少関数であるから　　$\therefore\quad -1\le\cos^3 x-\sin^3 x\le 1$

同様に　$f_4(x)=\cos^4 x-\sin^4 x$　とおくと　$f_4(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$

$f_4'(x)=-4\sin x\cos x=0$　　極値を与える　xは　$0,\ \pi/2$

$0\le x\le\pi/2$　で減少関数であるから　　$\therefore\quad -1\le\cos^4 x-\sin^4 x\le 1$

(3)の別解)

$f_n(x)=\cos^n x-\sin^n x$　として　$n=1$　のときは(1)より成立する。

$n=k$　のとき成り立つと仮定すると　$f_k(x)=\cos^k x-\sin^k x$

$n=k+1$　のとき　$f_{k+1}(x)=\cos^{k+1} x-\sin^{k+1} x$

これから　$f_{k+1}'(x)=-(k+1)\sin x\cos x(\cos^{k-1} x+\sin^{k-1} x)$

ここで最終項$\cos^{k-1}x+\sin^{k-1}x$は指数$k-1$の偶数・奇数にかかわらず $0\le\sin x\le 1$, $0\le\cos x\le 1$ で両者が同時に 0 となることはないから $\cos^{k-1}x+\sin^{k-1}x>0$ となり $f'_{k+1}(x)$の符号に影響を与えない。 $f'_{k+1}(x)=0$ から極値を与えるxは 0 と$\pi/2$である。

$\therefore\ f'_{k+1}(x)\le 0$ （$0\le x\le\pi/2$）で減少関数であるから $-1\le\cos^{k+1}x-\sin^{k+1}x\le 1$

以上のことから、与えられた不等式は すべての自然数について成り立つ。

注） $k-1$ が奇数のとき $\cos^{k-1}x+\sin^{k-1}x$は下記のように因数分解できるが、$\cos^{k-1}x+\sin^{k-1}x>0$、$\cos x+\sin x>0$ から第 2 項も正になる。

$$\cos^{k-1}x+\sin^{k-1}x=(\cos x+\sin x)(\cos^{k-2}x-\cos^{k-3}x\sin x+\cdot\cdot\cdot+\sin^{k-2}x)$$

問題 4. 第一象限で、半直線lのx軸となす角θを三等分する半直線l_1、l_2がある。また半直線lの点を P (9, 13) とし、半直線の傾きは$l_1<l_2$とする。

(1) l_1、l_2の方程式を求めよ。

(2) 三つの三角形の面積比$S_1:S_2:S_3$を最も簡単な整数の比で求めよ。

解）

(1) $\angle l_2OD=\theta$ とおくと$\angle l_1OD=2\theta$、$\angle lOD=3\theta$ となるから

$\tan 3\theta=\dfrac{13}{9}$ これから $\tan\theta,\tan 2\theta$ を求めるとよい。

$$\tan(\theta+2\theta)=\frac{\tan\theta+\tan 2\theta}{1-\tan\theta\tan 2\theta}=\frac{\tan\theta+\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}{1-\dfrac{2\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}}=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}=\frac{13}{9}$$

$\tan\theta=t$ とおいて展開して $9t^3-39t^2-27t+13=0$ ---------(i)

ここで $t>0$ かつ $\tan 3\theta=\dfrac{13}{9}$ より $0<t<\dfrac{13}{9}$ ---------(ii)

(1)の左辺を $f(t)$ として $f(\frac{1}{3})=\frac{1}{3}-\frac{13}{3}-9+13=0$

因数分解して $(3t-1)(3t^2-12t-13)=0$ $\therefore$ $t=\dfrac{1}{3}$、$\dfrac{6\pm 5\sqrt{3}}{3}$

(ii)の条件 $0<t<13/9$ より $t=1/3$ このとき $\tan 2\theta=\dfrac{2/3}{8/9}=\dfrac{3}{4}$

（答）l_1 $y=\dfrac{1}{3}x$ 、l_2 $y=\dfrac{3}{4}x$

(2) B のy座標をbとすると $\tan 2\theta=\dfrac{b}{9}=\dfrac{3}{4}$ から $b=\dfrac{27}{4}$

同様にCのy座標aは　$\tan\theta = \dfrac{a}{9} = \dfrac{1}{3}$ から　$a = 3$

各三角形の面積は

$S_1 = \dfrac{9}{2}(13 - \dfrac{27}{4}) = \dfrac{225}{8}$　　$S_2 = \dfrac{9}{2}(\dfrac{27}{4} - 3) = \dfrac{135}{8}$　　$S_3 = \dfrac{9}{2} \times 3 = \dfrac{27}{2}$

これから　$S_1 : S_2 : S_3 = 225:135:108 = 25:15:12$

（答）$S_1 : S_2 : S_3 = 25:15:12$

(1)の別解）

直線　$x = 9$に対しx軸との交点をH, l_1との交点をA, l_{2_1}との交点をBとする。

角度は解）と同じにとって BH=a, AB=b とおく。三等分より　$\tan\theta = a/9 < 1/\sqrt{3}$

$\tan 3\theta = \dfrac{13}{9}$;　$\tan\theta = \dfrac{a}{9}$ から　$\tan 2\theta = \dfrac{a+b}{9} = \dfrac{18a}{81 - a^2}$ （$0 < a < 3\sqrt{3}$）

$$\tan 3\theta = \tan(2\theta + \theta) = \frac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1 - \tan 2\theta \tan\theta} = \frac{a(a^2 - 243)}{27(a^2 - 27)} = \frac{13}{9}$$

これから　$a^3 - 39a^2 - 243a + 1053 = 0$　　素因数分解して

$a^3 - 13 \cdot 3a^2 - 3^5 a + 13 \cdot 3^4 = 0$　　$3^3(1 - 13 - 27 + 39) = 0$　より

$(a-3)(a^2 - 36a - 351) = 0$　これから　$a = 3$、　$3(6 \pm 5\sqrt{3})$

後者は不適だから　$a = 3$　$\tan\theta = 1/3$、$\tan 2\theta = 3/4$

問題 5.　$\cos C = \dfrac{\cos A + \cos B}{\sin A + \sin B}$ （但し$A \neq B, A + B + C = \pi$）のとき、$C$は $\dfrac{\pi}{4} < C < \dfrac{\pi}{3}$ を満たす定数でただ一つに限ることを証明せよ。

解）

$$右辺 = \frac{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2})} = \frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}} \quad (\because A \neq B)$$

$\therefore$　$\cos C \cos\dfrac{C}{2} = \sin\dfrac{C}{2}$　　ここで$\cos C \cos\dfrac{C}{2} > 0$, $\sin\dfrac{C}{2} > 0$ より

$0 < C < \dfrac{\pi}{2}$　　この条件の下で、両辺を平方して変形すると

$\cos^2 C \cos^2 \dfrac{C}{2} = \cos^2 C \dfrac{1 + \cos C}{2} = \sin^2 \dfrac{C}{2} = \dfrac{1 - \cos C}{2}$　から

$\cos^2 C(1 + \cos C) = 1 - \cos C$

$\cos^3 C + \cos^2 C + \cos C - 1 = 0$　・・・・（＊）

$t = \cos C$　とおくと　C は三角形の一つの内角だから　$0 < C < \dfrac{\pi}{2}$ より

$0 < t < 1$ となる。

（＊）の左辺を $f(t)$ として　$0 < t < 1$ の範囲で t の解を調べる。

$f(t) = t^3 + t^2 + t - 1$　から　$f'(t) = 3t^2 + 2t + 1 = 0$ で

D/4=$1^2 - 3 = -2 < 0$ より　$f(t)$ は単調増加関数

グラフの概形は　$\cos 0 = 1$、$\cos \pi/3 = 1/2$ より　また　$0 < \alpha < \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ として

t	0	・・・	$\dfrac{1}{2}$	・・・	$\dfrac{1}{2}+\alpha$	・・・	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	・・・	1
$f'(t)$		(+)		(+)		(+)		(+)	
$f(t)$	-1	↑	$-\dfrac{1}{8}$ $=-0.125$	↑	0	↑	$\dfrac{3\sqrt{2}-2}{4}$ $=0.5605$	↑	-
C	$(\dfrac{\pi}{2})$	↓	$\dfrac{\pi}{3}$	↓		↓	$\dfrac{\pi}{4}$	↓	(0)

従って　$\dfrac{1}{2} < t = \cos C < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　で、これから C は $\dfrac{\pi}{4} < C < \dfrac{\pi}{3}$ を満たす

ただ一つの定数となる。　Q.E.D

(別解)

$\cos C = \dfrac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$ より　$f(C) = \tan\dfrac{C}{2} - \cos C$ とおく（$-f(C)$ の時は逆に考えて）

$$f'(C) = \frac{\frac{1}{2}\cos^2\frac{C}{2} + \frac{1}{2}\sin^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}} + \sin C = \frac{2\cos^2\frac{C}{2}\sin C + 1}{2\cos^2\frac{C}{2}} > 0 \quad (\because 0 < \sin C < 1)$$

$f(C)$　は増加関数であるから

$f(\dfrac{\pi}{4}) = \sqrt{2} - 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1 < 0$　　$f(\dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{6} > 0$

従って　C は $\dfrac{\pi}{4}$ と $\dfrac{\pi}{3}$ の間にただ一つの解を持つ。

問題 6.　$A+B+C=\pi, A\neq B$　のとき

等式　$\cot\dfrac{C}{2}=\dfrac{2(\cos B+\cos A)(\cos B-\cos A)}{\sin 2A-\sin 2B+2\sin(A-B)}$　であることを証明せよ。

解）

与式の右辺を P とおく。P の分子＝$2(\cos^2 B-\cos^2 A)=(1+\cos 2B)-(1+\cos 2A)$

$=\cos 2B-\cos 2A=2\sin(A+B)\sin(A-B)$

P の分母＝$2\cos(A+B)\sin(A-B)+2\sin(A-B)=2\sin(A-B)\{\cos(A+B)+1\}$

$A\neq B$　であるから

$$P=\frac{\sin(A+B)}{1+\cos(A+B)}=\frac{\sin C}{1-\cos C}=\frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin^2\frac{C}{2}}=\cot\frac{C}{2}$$

（ ∵　$A+B=\pi-C$　より　$\sin(A+B)=\sin C$,　$\cos(A+B)=-\cos C$

また　$\cos 2C=1-2\sin^2 C$　より　$\cos C=1-2\sin^2\dfrac{C}{2}$

よって　$2\sin^2\dfrac{C}{2}=1-\cos C$　更に　$\sin\dfrac{C}{2}\neq 0$　から ）

（別解）

P の分母＝$2(\sin A\cos A-\sin B\cos B+\sin A\cos B-\cos A\sin B)$

$=2\{\sin A(\cos A+\cos B)-\sin B(\cos A+\cos B)\}$

$=2(\cos A+\cos B)(\sin A-\sin B)$

P の分子＝$2(\cos B+\cos A)(\cos B-\cos A)$　　　また　$A\neq B$ より

$$P=\frac{\cos B-\cos A}{\sin A-\sin B}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})}{\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})}=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\cot\frac{C}{2}$$

Q.E.D

4. おわりに

「はじめに」で述べたように、今回は三角関数の融合問題を取り上げた。

微分、積分、方程式、不等式などとの融合であるが、問題がこれらとの融合に集中したきらいがある。より広い範囲での応用問題作成を狙ったが、難しかった。

お気付きの点について識者のご意見を伺えれば幸いである。