‘06.03.19.

「私　の　数　学　散　歩　道」

My Path in Mathematics

関数　$f_n(x)=\sin^n x+\cos^n x$　（$0\le x\le \pi/2$、n は整数）の変域に

ついての６個の証明と $f_n(x)$ の特徴、数学上の美

横浜市西区　　村田　洋一

［ 目　次 ］

関数 $f_n(x)=\sin^n x+\cos^n x$ （$0\le x\le \pi/2$、n は整数）の変域についての６個の証明と $f_n(x)$ の特徴、数学上の美

１．はじめに

特別な場合を調べ一般のケースに展開する、これは検討に値する考え方と思う。

今回 関数 $f_3(x)=\sin^3 x+\cos^3 x$ を初めとして $f_4(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$,・・・・・・,

$f_n(x)=\sin^n x+\cos^n x$ （$0\le x\le \pi/2$）の変域等を調べていくうちに $f_n(x)$ の変域の証明は幾通りも可能であることに気づき、 $f_n(x)$ が持つ特徴も幾つか現れてきた。

また「数学は美しい」とよく言われる。無理数 $\sqrt{2}$ や $\pi/4$ の連分数表示に見られる数の配列の規則性（注-１）は言うに及ばず、学習を通してその美しさを感じてきたが、このテーマでの 6 個の証明、 (注)を含めての高次関数の扱い、方程式の解き方や式の変形、変域の規則性等を通じてそれを提示してみようと考え作成したのが本稿である。

言うまでもなく、計算は数学の基本で これなしで物事は進まない。その分 記載が冗長になるが、ご容赦の程お願いしたく。内容的には高校数学の範囲内に限定した。

さて 我々は高校生の時に、類似問題が多い次のような問題を解いた経験があったのではないだろうか。

$t=\sin x+\cos x$ $(0\le x\le \pi/2)$ とする。 $f_3(x)=\sin^3 x+\cos^3 x$ を t の式で表わしその最大値と最小値、並びにそのときの x の値を求めよ。

この問題の解法は前段の指示がなくとも $t=\sin x+\cos x$ とおくのが定石で、周知のように $t^2=1+2\sin x\cos x$ から $\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$ で $f_3(t)=(\sin x+\cos x)^3$

$-3\sin x\cos x(\sin x+\cos x)=t^3-3t\cdot\dfrac{t^2-1}{2}=-\dfrac{1}{2}t^3+\dfrac{3}{2}t$ となる。

t の変域は $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$ $(0\le x\le\dfrac{\pi}{2})$ より $1\le t\le\sqrt{2}$ であり、

$f(t)=-\dfrac{1}{2}t^3+\dfrac{3}{2}t$ は $f'(t)=-\dfrac{3}{2}(t+1)(t-1)$ からこの区間では負で減少関数、従って

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\le f(t)\le 1$ となる。その時の x の値は各々 $\dfrac{\pi}{4}$ および $0,\dfrac{\pi}{2}$ となる。

２．一般の n への展開と問題提起

この問題を $\sin^4 x+\cos^4 x,\ \sin^5 x+\cos^5 x$、・・・・，$\sin^n x+\cos^n x$ まで拡張したときの各関数の値の範囲はどうなるか、何か規則性が見つかるか、そのうまい証明法や別解があるか、など 以下に論評を試みた。

前節より $1/\sqrt{2}\le f_3(t)\le 1$ また $f_4(t)=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$

$=-\dfrac{1}{2}(t^2-1)^2+1$ $1\le t^2\le 2$ で $f_4(t)$ は減少するから $1/2\le f_4(t)\le 1$

同様に $f_5(t)=\sin^5 x+\cos^5 x$

$=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^3 x+\cos^3 x)-\sin^2 x\cos^2 x(\sin x+\cos x)=-\dfrac{1}{4}t^5+\dfrac{5}{4}t$

$f_5'(t)=0$ より $t=1$，$1\le t\le\sqrt{2}$ で減少関数であるから $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\le f_5(t)\le 1$

以下、$f_n(t)$ の取りうる範囲を $n=12$ まで調べると

$\dfrac{1}{4}\le f_6(t)\le 1$，$\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\le f_7(t)\le 1$，$\dfrac{1}{8}\le f_8(t)\le 1$，・・・・・・・ $\dfrac{1}{16\sqrt{2}}\le f_{11}(t)\le 1$，

$\dfrac{1}{32}\le f_{12}(t)\le 1$ ときれいな規則性が現れてくる。$f_n(t)$ は偶関数と奇関数に二分されるようであるが本当であろうか？ また $f_n(t)$ を表わす一般公式やその各係数を示す式を作ることことができるのであろうか？ などいろいろな疑問が出てきた。(注-2)

また先の不等式から $\sin^3 x+\cos^3 x\ge\sin^4 x+\cos^4 x\ge\sin^5 x+\cos^5 x\ge$・・・・・

$\ge\sin^n x+\cos^n x\ge 1/2^{\frac{n}{2}-1},\sin^n x+\cos^n x\le 1$ すなわち $1/2^{\frac{n}{2}-1}\le\sin^n x+\cos^n x\le 1$

が成り立つと予想される。

～ここで使用した $\sin^n x+\cos^n x\ge\sin^{n+1} x+\cos^{n+1} x$ の証明は（注-3）参照～

以上を踏まえて提案したのが 3 節冒頭の問題である。

なお $n=6$～9 のときの $f_n(t), f_n'(t)$ 等を（注-4）として掲載しておいた。

また $f_n(t)$ において $n=6$、10、14・・・すなわち $n=4k+2$（$k=1,2$・・)のとき、最高次の係数が 0 で（$n-2$）次式になるのは興味深い。(注-5)

３．提案した問題と 6 個の証明 および全体の纏めへ

n を $n\ge 3$ の整数とする。このとき,

$$1/2^{\frac{n}{2}-1}\le\sin^n x+\cos^n x\le 1\ \ (0\le x\le\frac{\pi}{2})\quad\text{・・・・・・・（＊）}$$

が成立することを数学的帰納法により証明せよ。

解）最初に　$\sin^n x+\cos^n x \le 1$、次に　$\sin^n x+\cos^n x \ge 1/2^{\frac{n}{2}-1}$　を証明する。

証明はいずれも２段構えの数学的帰納法で行う。

1）$\sin^n x+\cos^n x \le 1$ の証明

イ．$n=3,\ 4$ のとき

$\sin^3 x+\cos^3 x \le 1$　$\sin^4 x+\cos^4 x \le 1$ であるがこれは１, ２節で明らか。

よって $n=3,\ 4$ のとき成立する。

ロ．$n=k, k+1$ のとき成立すると仮定すると

$\sin^k x+\cos^k x \le 1$　　$\sin^{k+1} x+\cos^{k+1} x \le 1$　・・・・・・①

$n=k+2$ のときは

$\sin^{k+2} x+\cos^{k+2} x=(\sin x+\cos x)(\sin^{k+1} x+\cos^{k+1} x)-\sin x\cos x$

$\times(\sin^k x+\cos^k x) \le \sin x+\cos x-\sin x\cos x$ （∵　①より）

ここで　$h_1(x)=\sin x+\cos x-\sin x\cos x$ とすると

$h_1'(x)=\cos x-\sin x-(\cos^2 x-\sin^2 x)=0$ から $x=0, \pi/4, \pi/2$

x	0	・・・	$\pi/4$	・・・	$\pi/2$
$h_1'(x)$	0	$(-)$	0	$(+)$	0
$h_1(x)$	1	↓	$\sqrt{2}-1/2$	↑	1

従って $\sqrt{2}-1/2 \le h_1(x) \le 1$　から $\sin^{k+2} x+\cos^{k+2} x \le 1$　・・・②

② は $n=k+2$ のとき 成り立つことを示している。

2）$\sin^n x+\cos^n x \ge 1/2^{\frac{n}{2}-1}$ の証明

イ．$n=3,\ 4$ のとき

$\sin^3 x+\cos^3 x \ge 1/\sqrt{2}$　$\sin^4 x+\cos^4 x \ge 1/2$ であるがこれも１, ２節で明らか。

よって $n=3,\ 4$ のとき成立する。

ロ．$n=k, k+1$ のとき成立すると仮定すると

$\sin^k x+\cos^k x \ge 1/2^{\frac{k}{2}-1}$　　$\sin^{k+1} x+\cos^{k+1} x \ge 1/2^{\frac{k+1}{2}-1}=1/2^{\frac{k-1}{2}}$　・・・③

$n=k+2$　のときは

$\sin^{k+2} x+\cos^{k+2} x=(\sin x+\cos x)(\sin^{k+1} x+\cos^{k+1} x)-\sin x\cos x$

$\times(\sin^k x+\cos^k x) \ge 1/2^{\frac{k-1}{2}}(\sin x+\cos x)-1/2^{\frac{k}{2}-1}\sin x\cos x$

$=1/2^{\frac{k}{2}}\{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-2\sin x\cos x\}$　　（∵　③より）

ここで　$h_2(x)=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-2\sin x\cos x$　とおくと

$$h_2'(x)=\sqrt{2}(\cos x-\sin x)\{\,1-\sqrt{2}(\cos x+\sin x)\,\}=0$$ から　$x=\pi/4$

x	0	・・・	$\pi/4$	・・・	$\pi/2$
$h_2'(x)$	0	$(-)$	0	$(+)$	0
$h_2(x)$	$\sqrt{2}$	↓	1	↑	$\sqrt{2}$

従って $1\le h_2(x)\le\sqrt{2}$ から $\sin^{k+2}x+\cos^{k+2}x\ge 1/2^{\frac{k}{2}}=1/2^{\frac{k+2}{2}-1}$ ・・・④

④ は $n=k+2$ のとき 成り立つことを示している

②, ④から不等式は$n=k+2$のときも成り立つ。故に 問題の不等式は $n\ge 3$ のすべての整数 n について成り立つ。　Q .E .D.

.

（別解-1）　また 数学的帰納法で一度に証明するには、nを $n\ge 3$ の整数として

イ）$n=3$ のとき　$1/2^{\frac{3}{2}-1}=1/\sqrt{2}\le\sin^3 x+\cos^3 x\le 1$ だから成立する。

ロ）$n=k$ のとき成り立つと仮定すれば

$\dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}-1}}\le\sin^k x+\cos^k x\le 1$で$\dfrac{1}{2^{\frac{k+1}{2}-1}}\le\sin^{k+1}x+\cos^{k+1}x\le 1$ が成立つとよい。

$$f_{k+1}(x)=\sin^{k+1}x+\cos^{k+1}x$$ として

$$f_{k+1}'(x)=(k+1)\sin x\cos x(\sin^{k-1}x-\cos^{k-1}x)=0$$

$\sin^{k-1}x-\cos^{k-1}x=(\sin x-\cos x)(\sin^{k-2}x+\sin^{k-3}x\cos x+$ ・・・・

$+\sin x\cos^{k-3}x+\cos^{k-2}x)=0$ であるが、右辺の第２項からは $f_{k+1}'(x)$ の

符号を変化させる正の実数解は出てこない。（注-6）

従って $f_{k+1}(x)$ は　$x=0$、$\pi/2$で最大値、$x=\pi/4$で最小値をとる。

$$\therefore\quad f_{k+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k+1}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k+1}=\frac{2}{(\sqrt{2})^{k+1}}=\frac{1}{2^{\frac{k+1}{2}-1}}$$

$f_{k+1}(0)=f_{k+1}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$　　また　$f_{k+1}'(x)$は　（－）　$(0<x<\pi/4$

（＋）$(\pi/4<x<\pi/2)$

従って　$\dfrac{1}{2^{\frac{k+1}{2}-1}} \le \sin^{k+1} x + \cos^{k+1} x \le 1$ となり、$n = k+1$のときも成り立つ。

故に 問題の不等式は $n \ge 3$ のすべて自然数 nについて成り立つ。　　Q .E .D.

なお 言うまでもないが本問は数学的帰納法による、との制限がないとnは $n \ge 3$の整数として微分法で解くことができる。

(別解-2)　$f_n(x) = \sin^n x + \cos^n x$ とおくと $f_n'(x) = n\cos x \sin^{n-1} x - n\sin x \cos^{n-1} x$

$= n\sin x \cos x(\sin^{n-2} x - \cos^{n-2} x)$ =0

また　$\sin^{n-2} x - \cos^{n-2} x = (\sin x - \cos x)(\sin^{n-3} x + \sin^{n-4} x\cos x +$ ・・・・・

$+ \ \sin x\cos^{n-4} x + \cos^{n-3} x)$ で この第 2 項からは前頁の証明同様 $f_n'(x)$の符号を変化させる正の実数解は出てこない。従って$x = 0$、$\pi/2$で最大値、$x = \pi/4$で最小値をとる。

x	0	・・・	$\pi/4$	・・・	$\pi/2$
$f_n'(x)$	0	$(-)$	0	$(+)$	0
$f_n(x)$	1	↓	$1/2^{\frac{n}{2}-1}$	↑	1

これから　$f(\dfrac{\pi}{4}) = 1/2^{\frac{n}{2}-1} \le f_n(x) \le 1$ は容易である。　　Q .E .D.

(別解-3)　更に 相加・相乗平均を使うと $0 \le x \le \pi/2$ より $\sin x, \cos x \ge 0$

$g_n(x) = \sin^n x + \cos^n x \ge 2\sin^{\frac{n}{2}} x \cos^{\frac{n}{2}} x = \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}} \sin^{\frac{n}{2}} 2x \ge \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}}$ から

$\sin 2x$の最大値は 1 で$\sin^{\frac{n}{2}} 2x$ のそれも同じ、その時のx は$\sin^n x = \cos^n x$より

$x = \pi/4$、 従って　$g_n(x)$の最小値は$\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}}$となる。

一方 $\sin x \le 1$, $\cos \le 1$であるが、$0 \le x \le \pi/2$で前者は増加関数、後者は減少関数で$x = \pi/4$　以外同じ値をとることがないから $g_n(x)$の最大値は 1 となり、その時の xは0 , $\pi/2$ となる。　　Q .E .D.

(別解-4)

高校三年のときに覚えた記憶がある次の不等式を利用する。

$\frac{a^n+b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \quad (a,b \geq 0)$ ・・・① これから $a=\sin x$ 、$b=\cos x$ として

$$\frac{\sin^n x+\cos^n x}{2} \geq \left(\frac{\sin x+\cos x}{2}\right)^n = \frac{\sin^n (x+\frac{\pi}{4})}{2^{\frac{n}{2}}} \geq \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \quad \text{or} \quad \geq \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \geq \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$$

$\sin^n x+\cos^n x \leq 1$ の証明は（別解-3）の後段に同じ　$\therefore \quad \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}} \leq f_n(x) \leq 1$

なお ①の証明概略は下記の通り

$$\text{左辺}-\text{右辺}=\frac{1}{2}\left\{a^n-\left(\frac{a+b}{2}\right)^n\right\}+\frac{1}{2}\left\{b^n-\left(\frac{a+b}{2}\right)^n\right\}=\frac{1}{2}\left(a-\frac{a+b}{2}\right)\left\{a^{n-1}+\right.$$

$$\left.a^{n-2}\cdot\frac{a+b}{2}+\cdot\ \cdot\ \cdot+a\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-2}+\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-1}\right\}+\frac{1}{2}\left(b-\frac{a+b}{2}\right)\left\{b^{n-1}+\right.$$

$$\left.b^{n-2}\cdot\frac{a+b}{2}+\cdot\ \cdot\ \cdot+b\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-2}+\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-1}\right\}=\frac{1}{4}(a-b)\left\{(a^{n-1}-b^{n-1})+\right.$$

$$(a^{n-2}-b^{n-2})\cdot\frac{a+b}{2}\cdot\ \cdot+(a-b)\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-2}\Big\}=\frac{1}{4}(a-b)^2\Big\{(a^{n-2}+a^{n-3}b+$$

$$\left.\cdot\ \cdot+b^{n-2})+(a^{n-3}+a^{n-4}b+\cdot\ \cdot+b^{n-3})\cdot\frac{a+b}{2}+\cdot\ \cdot\ \cdot+\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-2}\right\}$$

ここで　$a,b \geq 0$　より　①が成り立つ。

また、$\sin x=t$（$0 \leq t \leq 1$）とおいても、不等式 $1/2^{\frac{n}{2}-1} \leq h_n(t) \leq 1$　は二段構えの数学的帰納法により証明できるし、$h_n(t)$ は $f_n(t)$ と違った性質も持つ。

～概要は(注-7）参照～

以上の議論から結論できるが、$f_k(x)$（$k=f,g,h$）に最大値を与える x は 0，$\pi/2$、最小値を与える x は $\pi/4$ である。

4．おわりに

今回は一つのテーマを決めそれを掘り下げてみた。いろいろ検討しているうちに本文と(注)を合わせ 15 頁にもなったため、検討した内容の一部を割愛せざるを得なかった。

勿論 気がつかなかった視点、わからなかった問題もありこのような小さなテーマでも要検討の素材が多く存在し、数学の底の広さと体系の美しさを感じた。

尚、(別解-2）からも見易いように n は条件付きであるが、負の整数でも成り立つ。それを $f_n(t)$ から見て「$n \leq 2$ の整数の場合の不等式の検討」を行ったが、(注-8）と全体の纏めも参照願いたい。

お気づきの点について識者のご意見を伺えれば幸いである。

注-１）$\sqrt{2}$、$\dfrac{\pi}{4}$　の連分数表示

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}}}}}\qquad \frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{\cdots\cdots}}}}}}.$$

注-2）　各関数の取りうる範囲　　　f_n　　$t=\sin x+\cos x\ (0\le x\le \dfrac{\pi}{2})$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\le \sin^3 x+\cos^3 x\ \le 1 \qquad f_3=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t$$

$$\frac{1}{2}\le \sin^4 x+\cos^4 x\ \le 1 \qquad f_4=-\frac{1}{2}t^4+t^2+\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\le \sin^5 x+\cos^5 x\ \le 1 \qquad f_5=-\frac{1}{4}t^5+\frac{5}{4}t$$

$$\frac{1}{4}\le \sin^6 x+\cos^6 x\ \le 1 \qquad f_6=-\frac{3}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\le \sin^7 x+\cos^7 x\ \le 1 \qquad f_7=\frac{1}{8}t^7-\frac{7}{8}t^5+\frac{7}{8}t^3+\frac{7}{8}t$$

$$\frac{1}{8}\le \sin^8 x+\cos^8 x\ \le 1 \qquad f_8=\frac{1}{8}t^8-\frac{1}{2}t^6-\frac{1}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{8\sqrt{2}}\le \sin^9 x+\cos^9 x\ \le 1 \qquad f_9=\frac{1}{16}t^9-\frac{9}{8}t^5+\frac{3}{2}t^3+\frac{9}{16}t$$

$$\frac{1}{16}\le \sin^{10} x+\cos^{10} x\le 1 \qquad f_{10}=\frac{5}{16}t^8-\frac{5}{4}t^6+\frac{5}{8}t^4+\frac{5}{4}t^2+\frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{16\sqrt{2}}\le \sin^{11} x+\cos^{11} x\le 1 \qquad f_{11}=-\frac{1}{32}t^{11}+\frac{11}{32}t^9-\frac{11}{16}t^7-\frac{11}{16}t^5+\frac{55}{32}t^3+\frac{11}{32}t$$

$$\frac{1}{32}\le\ \sin^{12} x+\cos^{12} x\ \le 1 \qquad f_{12}=-\frac{1}{32}t^{12}+\frac{3}{16}t^{10}+\frac{3}{32}t^8-\frac{13}{8}t^6+\frac{45}{32}t^4+\frac{15}{16}t^2+\frac{1}{32}$$

1）上記の　f_n　の形から n が偶数のとき f_n は t　の偶関数、奇数のときは奇関数になると推定される。$\sin x$，t は奇関数、$\cos x$ ，$(t^2-1)/2$ は偶関数から見てこのようにはっきり二分されるのは奇異に感じるが、以降その証明とその中で得られた $f_{2n}(t)$、$f_{2n+1}(t)$ を t　で表わす一般公式を示す。これらの一見複雑に見える式が　n 次式($n=6,10,14,18$・・のとき　$n-2$　次式）になるのは更に不思議な感じがする。

$\sin x+\cos x=t$,　$\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$ より $\sin x$, $\cos x$ を解とする二次方程式は

$y^2-ty+(t^2-1)/2=0$　これから　$y=(t\pm\sqrt{2-t^2})/2$

①　偶関数のとき　$f_{2n}(t)=\sin^{2n}x+\cos^{2n}x$　とおけるから

$$f_{2n}(t)=(\frac{t+\sqrt{2-t^2}}{2})^{2n}+(\frac{t-\sqrt{2-t^2}}{2})^{2n}=\frac{1}{2^n}\{\ (1+t\sqrt{2-t^2})^n+(1-t\sqrt{2-t^2})^n\ \}$$

　ここで　$f_{2n}(t)=f_{2n}(-t)$　で、$f_{2n}(t)$ の形から $\sin x$ 、$\cos x$ が入れ替わった逆のケースでも同じになるから、$f_{2n}(t)$　は偶関数である。

　尚、この場合　$f_{2n}(x)=\sin^{2n}x+\cos^{2n}x$　として、$f_{2n}(-x)=\sin^{2n}(-x)+\cos^{2n}x$

$=\sin^{2n}x+\cos^{2n}x$　から　$f_{2n}(x)=f_{2n}(-x)$ を簡単に示すことができる。

②　奇関数のとき　$f_{2n+1}(t)=\sin^{2n+1}x+\cos^{2n+1}x$　とおけるから　①と同様に

$$f_{2n+1}(t)=(\frac{t+\sqrt{2-t^2}}{2})^{2n+1}+(\frac{t-\sqrt{2-t^2}}{2})^{2n+1}=\frac{1}{2^{n+1}}\{\ (t+\sqrt{2-t^2})(1+t\sqrt{2-t^2})^n$$

$$+(t-\sqrt{2-t^2})(1-t\sqrt{2-t^2})^n\ \}$$　となる。

$$f_{2n+1}(-t)=\frac{1}{2^{n+1}}\{\ -(t-\sqrt{2-t^2})(1-t\sqrt{2-t^2})^n-(t+\sqrt{2-t^2})(1+t\sqrt{2-t^2})^n\ \}$$

より　$f_{2n+1}(t)=-f_{2n+1}(-t)$　で　$f_{2n+1}(t)$　は奇関数であることが証明された。

2)　$f_n(x)$ を t の関数で表わした時の　t^k の係数　c_k を示す公式

（①, ②の表は $n=14$ までの範囲で類推したもの）

①　偶関数　$f_{2n}(t)$ のとき

n	4	6	8	10	12	14
ア.定数項	1/2	$1/2^2$	$1/2^3$	$1/2^4$	$1/2^5$	$1/2^6$
イ.t^2 の項	1	3/2	$6/2^2$	$10/2^3$	$15/2^4$	$21/2^5$
ウ.最高次数 t^n	$-1/2$	0	$1/2^3$	0	$-1/2^5$	0

②　奇関数　$f_{2n+1}(t)$ のとき

n	3	5	7	9	11	13
ア.t の項	3/2	$5/2^2$	$7/2^3$	$9/2^4$	$11/2^5$	$13/2^6$
イ.最高次数 t^n	$-1/2$	$-1/2^2$	$1/2^3$	$1/2^4$	$-1/2^5$	$-1/2^6$

①の一般項は $f_{2n}(t)$ を構成する第 1 項と第 2 項に二項定理を適用し展開してみると

$$(1+t\sqrt{2-t^2})^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 t(2-t^2)^{\frac{1}{2}} + {}_nC_2 t^2(2-t^2) + {}_nC_3 t^3(2-t^2)^{\frac{3}{2}} + {}_nC_4 t^4(2-t^2)^2 + \cdot\cdot$$

$$(1-t\sqrt{2-t^2})^n = {}_nC_0 - {}_nC_1 t(2-t^2)^{\frac{1}{2}} + {}_nC_2 t^2(2-t^2) - {}_nC_3 t^3(2-t^2)^{\frac{3}{2}} + {}_nC_4 t^4(2-t^2)^2 + \cdot\cdot$$

辺々加えて　$2^n f_{2n}(t) = 2{}_nC_0 + 2{}_nC_2 t^2(2-t^2) + 2{}_nC_4 t^4(2-t^2)^2 + 2{}_nC_6 t^6(2-t^2)^3 +$

$$= 2 + 4{}_nC_2 t^2 + (8{}_nC_4 - 2{}_nC_2)t^4 + 8(2{}_nC_6 - {}_nC_4)t^6 + \cdot\cdot\cdot$$

$$= 2 + 2n(n-1)t^2 + \frac{1}{3}n(n-1)(n^2-5n+3)t^4 + \frac{1}{45}n(n-1)(n-2)(n-3)(n^2-9n+5)t^6 + \cdot\cdot$$

t^k の係数を c_k として係数比較すると　　$c_0 = \dfrac{2}{2^n}$、　$c_2 = \dfrac{2n(n-1)}{2^n}$

$c_4 = \dfrac{n(n-1)(n^2-5n+3)}{3\cdot 2^n}$，　$c_6 = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n^2-9n+5)}{45\cdot 2^n}$ ・・・となる。

同様に ②の一般項は　$f_{2n+1}(t)$　の公式より

$$(t+\sqrt{2-t^2})(1+t\sqrt{2-t^2})^n = {}_nC_0 t + {}_nC_1 t^2(2-t^2)^{\frac{1}{2}} + {}_nC_2 t^3(2-t^2) + {}_nC_3 t^4(2-t^2)^{\frac{3}{2}} + \cdot\cdot$$

$$+{}_nC_0(2-t^2)^{\frac{1}{2}} + {}_nC_1 t(2-t^2) + {}_nC_2 t^2(2-t^2)^{\frac{3}{2}} + {}_nC_3 t^3(2-t^2)^2 + \cdot\cdot$$

$$(t-\sqrt{2-t^2})(1-t\sqrt{2-t^2})^n = {}_nC_0 t - {}_nC_1 t^2(2-t^2)^{\frac{1}{2}} + {}_nC_2 t^3(2-t^2) - {}_nC_3 t^4(2-t^2)^{\frac{3}{2}} + \cdot\cdot$$

$$-{}_nC_0(2-t^2)^{\frac{1}{2}} + {}_nC_1 t(2-t^2) - {}_nC_2 t^2(2-t^2)^{\frac{3}{2}} + {}_nC_3 t^3(2-t^2)^2 - \cdot\cdot$$

$$\therefore\ 2^{n+1} f_{2n+1}(t) = 2{}_nC_0 t + 2{}_nC_2 t^3(2-t^2) + 2{}_nC_4 t^5(2-t^2)^2 + 2{}_nC_7 t^7(2-t^2)^3 + \cdot\cdot$$

$$+2{}_nC_1 t(2-t^2) + 2{}_nC_3 t^3(2-t^2)^2 + 2{}_nC_5 t^5(2-t^2)^3 + 2{}_nC_7 t^7(2-t^2)^4 + \cdot\cdot$$

$$= (2{}_nC_0 + 4{}_nC_1)t + (4{}_nC_2 - 2{}_nC_1 + 8{}_nC_3)t^3 + (16{}_nC_5 + 8{}_nC_4 - 8{}_nC_3 - 2{}_nC_2)t^5$$

$$+ (32{}_nC_7 + 16{}_nC_6 - 24{}_nC_5 - 8{}_nC_4 + 2{}_nC_3)t^7 + \cdot\cdot\cdot$$

これから $c_1 = \dfrac{{}_nC_0 + 2{}_nC_1}{2^n}$，$c_3 = \dfrac{4{}_nC_3 + 2{}_nC_2 - {}_nC_1}{2^n}$，　$c_5 = \dfrac{8{}_nC_5 + 4{}_nC_4 - 4{}_nC_3 - {}_nC_2}{2^n}$

$c_7 = \dfrac{16{}_nC_7 + 8{}_nC_6 - 12{}_nC_5 - 4{}_nC_4 + {}_nC_3}{2^n}$　　・・・となる。

具体的に数字を入れ 7 頁の関数とチェックしてみる。

偶 関 数 の 場 合 、 例 え ば $c_4=\dfrac{n(n-1)(n^2-5n+3)}{3\cdot 2^n}$ で $n=4$,5,6 と お く と 各 々 $-\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{8},\dfrac{45}{32}$ で f_8, f_{10}, f_{12} における t^4 の係数になっている。同様に c_3 で $n=3,4,5$ とおくと各々 $\dfrac{7}{8},\dfrac{3}{2},\dfrac{55}{32}$ で f_7, f_9, f_{11} における t^3 の係数であることが確認できる。

注-3） $\sin^n x+\cos^n x\geq \sin^{n+1}x+\cos^{n+1}x$ の証明　P=左辺―右辺　とする。

$$\mathrm{P}=\sin^n x(1-\sin x)+\cos^n x(1-\cos x)=\sin^n x\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2+2\cos^n x\sin^2\frac{x}{2}\geq 0$$

等号は　$\sin^n x\geq 0$，　$\cos^n x\geq 0$ より $\sin^n x=0$, $\sin\dfrac{x}{2}=0$ 即ち $x=0$

のとき成立 （$\sin\dfrac{x}{2}=\cos\dfrac{x}{2}$ かつ $\sin\dfrac{x}{2}=0$ のときは成立しない。

[別解]　$0\leq\sin x\leq 1$,　$0\leq\cos x\leq 1$ より $\sin^n x\geq\sin^{n+1}x$,　$\cos^n x\geq\cos^{n+1}x$

辺々 加えて　$\sin^n x+\cos^n x\geq\sin^{n+1}x+\cos^{n+1}x$

∴　$\sin^n x+\cos^n x\geq\sin^{n+1}x+\cos^{n+1}x$ が成立する。　Q.E.D.

注-4） $n=6$～9 のときの $f_n(t)$，$f_n'(t)$ 等と $f_n(t)$ の値の範囲

・ $f_6(t)=\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)$

$=-\dfrac{3}{4}(t^2-1)^2+1$　　t^2 の二次式で　$1\leq t^2\leq 2$　から　$\dfrac{1}{4}\leq f_6(t)\leq 1$

・ $f_7(t)=\sin^7 x+\cos^7 x=(\sin^5 x+\cos^5 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)-\sin^2 x\cos^2 x$

$\times(\sin^3 x+\cos^3 x)=\dfrac{1}{8}t(t^6-7t^4+7t^2+7)$　　$f_7'(t)=\dfrac{7}{8}(t+1)(t-1)(t^4-4t^2-1)$

$1\leq t^2\leq 2$ で $t^4-4t^2-1<0$ から $f_7'(t)<0$　　$\therefore\dfrac{\sqrt{2}}{8}\leq f_7(t)\leq 1$

・ $f_8(t)=\sin^8 x+\cos^8 x=(\sin^5 x+\cos^5 x)(\sin^3 x+\cos^3 x)-\sin^3 x\cos^3 x$

$\times(\sin^2 x+\cos^2 x)=\dfrac{1}{8}(t^8-4t^6-2t^4+12t^2+1)$　　$f_8'(t)=t(t^6-3t^4-t^2+3)$

$=t(t+1)(t-1)(t^2-3)(t^2+1)$ より　$\dfrac{1}{8}\leq f_8(t)\leq 1$

・ $f_9(t)=\sin^9 x+\cos^9 x=(\sin^3 x+\cos^3 x)^3-3\sin^3 x\cos^3 x(\sin^3 x+\cos^3 x)$

$=\dfrac{1}{16}t(t^2-3)(t^6+3t^4-9t^2-1)=\dfrac{1}{16}(t^9-18t^5+24t^3+9t)$

$f_9'(t)=\dfrac{9}{16}(t^2-1)(t^6+t^4-9t^2-1)$　　ここで　$1\le t\le\sqrt{2}$　から　$1\le t^2\le 2$

$t^2=x\ge 0$　とおいて　$f_9'(t)=g(x)=\dfrac{9}{16}(x-1)(x^3+x^2-9x-1)$　とする。

$g(x)=\dfrac{9}{16}(x^4-10x^2+8x+1)$　から $1\le x\le 2$ で $g(x)$　の符号を考える。

$g'(x)=\dfrac{9}{4}(x-2)(x^2+2x-1)=0$　より　$x=-1\pm\sqrt{2}$，　2

x	・・	1	・・	2	・・
$g'(x)$			$(-)$	0	$(+)$
$g(x)$		0	↓	－63/16	↑

より $g'(x)\le 0$　$(1\le x\le 2)$

$g(x)$ も同区間で負の減少関数となる。

従って　$\dfrac{\sqrt{2}}{16}=f_9(\sqrt{2})\le f_9(t)\le f_9(1)=1$

注-5)　$f_n(t)$　が n　次式にならない場合

$\sin^n x+\cos^n x=\sin^n x+(1-\sin^2 x)^{\frac{1}{2}n}$　と変形して最高次数の $\sin^n x$　の係数は

$1+(-1)^{\frac{1}{2}n}$　である。これが 0 になるのは $(-1)^{\frac{1}{2}n}=(-1)^{2k+1}=-1$　即ち $n=4k+2$

（ $k=1,2,3$・・・）より　$n=6,10,14,18$・・・のときである。

このとき　$f_n(x)$ は $(n-2)$ 次式になる。なぜなら $(1-\sin^2 x)^{\frac{1}{2}n}$ （n は偶数）に

おいて次に高い次数の係数は　${}_{\frac{n}{2}}C_{\frac{n}{2}-1}\cdot 1^1\cdot(-\sin^2 x)^{\frac{n}{2}-1}=(-1)^{\frac{n}{2}-1}n(n-1)\sin^{n-2}x\ne 0$

で、同様にそれ以下の次数の各係数も 0 にならない、からである。

注-6)　$\sin^{k-2}x+\sin^{k-3}x\cos x+$・・・ を 0 にする x　が存在しないことの証明

$\sin^{k-2}x+\sin^{k-3}x\cos x+$・・・$+\sin x\cos^{k-3}x+\cos^{k-2}x=0$

両辺を　$\cos^{k-2}x(\ne 0)$　で割って

$\tan^{k-2}x+\tan^{k-3}x+$・・・$+\tan x+1=0$

ここで　$\tan x = t$ とすると　$0 \le x \le \pi/2$ より　$0 \le t < \infty$

$t^{k-2} + t^{k-3} +\cdot\cdot\cdot + t + 1 = 0$

$\therefore \quad -(t^{k-2} + t^{k-3} +\cdot\cdot\cdot + \mathrm{t}) = 1 \quad \cdot\cdot\cdot(*)$

この方程式が t= 1 を実数解に持つとすると $1 \times (k-2) + 1 = 0$ でなければならない。

しかし $k = 1$ で これはありえない。

t ＞1 を実数解に持つとすると（＊）で　右辺＝１、左辺< 0 で矛盾

0 $\le t$ ＜1　の場合も同様で（＊）は $0 \le t < \infty$ の範囲で実数解を持たない。

従って　$f'_{k+1}(x)$　を 0 にするのは $x = 0, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}$ のみである。

〔別解〕 $0 \le \sin x \le 1$、$0 \le \cos x \le 1$　但し両方が同時に 0 になることはないから左辺＞0, 右辺＝0 で矛盾、とした方が簡単である。またこれに準じて　$t \ge 0$ より $t^{k-2} + t^{k-3} +\cdot\cdot\cdot + t + 1 \ge 1 > 0$　で正の解を持たない、と結論できる。

注-7)　$\sin x = t$ とし $h_n(t) = t^n + (1-t^2)^{\frac{1}{2}n}$ （$0 \le t \le 1$）とする。（$\cos x = t$ でも同様）

・$h_3(t) = t^3 + (1-t^2)^{\frac{3}{2}}$　$h'_3(t) = 3t(t - \sqrt{1-t^2}) = 0$　　$t = 0$、$1/\sqrt{2}$

$h'_3(t)$ の符号から $1/\sqrt{2} \le h_3(t) \le 1$　　以下同様に $h_6(t)$ まで示す。

・$h_4(t) = t^4 + (1-t^2)^2 = 2(t^2 - 1/2)^2 + 1/2$　　$0 \le t^2 \le 1$ より $1/2 \le h_4(t) \le 1$

・$h_5(t) = t^5 + (1-t^2)^{\frac{5}{2}}$　$h'_5(t) = 5t\{ t^3 - (1-t^2)^{\frac{3}{2}} \} = 5t\{ t - (1-t^2)^{\frac{1}{2}} \}$

$\times \{ 1 + t(1-t^2)^{\frac{1}{2}} \} = 0$ から $t = 0$、$1/\sqrt{2}$　$h'_5(t)$ の符号から $1/2\sqrt{2} \le h_5(t) \le 1$

・$h_6(t) = t^6 + (1-t^2)^3 = 3(t^2 - 1/2)^2 + 1/4$　$0 \le t^2 \le 1$ より $1/4 \le h_6(t) \le 1$

～$1/2^{\frac{n}{2}-1} \le h_n(t) \le 1$ の証明概略（別解-5)～　$n = k, k+1$ を仮定、数学的帰納法による

① $t^{k+2} + (1-t^2)^{\frac{k+2}{2}} = \{ t + (1-t^2)^{\frac{1}{2}} \}\{ t^{k+1} + (1-t^2)^{\frac{k+1}{2}} \}$

$-t(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\{ (1-t^2)^{\frac{k}{2}} + t^k \} \le t + (1-t^2)^{\frac{1}{2}} - t(1-t^2)^{\frac{1}{2}} = h(t) \le 1$

$\because h'(t) = \{ (1-t^2)^{\frac{1}{2}} + 2t^2 - t - 1 \}/(1-t^2)^{\frac{1}{2}} = 0$　$2t^2 - t - 1 < 0$ に注意して

$t = 0, 1/\sqrt{2}, 1$　これから $\sqrt{2} - 1/2 \le h(t) \le 1$ で右の不等式が成立

② 同様に $t^{k+2}+(1-t^2)^{\frac{k+2}{2}} \ge 1\big/2^{\frac{k-1}{2}}\left\{\ t+(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\ \right\}-1\big/2^{\frac{k}{2}-1}t(1-t^2)^{\frac{1}{2}}$

$=1\big/2^{\frac{k}{2}}\left\{\ \sqrt{2}t+\sqrt{2}(1-t^2)^{\frac{1}{2}}-2t(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\ \right\}\ge 1\big/2^{\frac{k}{2}}$ $\{\ \}$内＝$i(t)$とする。

$\because\ i'(t)=1+(2\sqrt{2}t^2-t-\sqrt{2})/(1-t^2)^{\frac{1}{2}}=0$ $\sqrt{2}(2t^2-1)-t=-(1-t^2)^{\frac{1}{2}}$ で

左辺<0 に注意し両辺を平方して整理すると $8t^4-4\sqrt{2}t^3-6t^2+2\sqrt{2}t+1=0$

$(2t^2-1)$ を因数に持つから $(2t^2-1)(4t^2-2\sqrt{2}t-1)=0$ これを解いて

$t=\pm1\big/\sqrt{2}$，$t=(\sqrt{2}\pm\sqrt{6})\big/4$を得るが、$\sqrt{2}(2t^2-1)-t<0$より $t=1\big/\sqrt{2}$のみ

適する。増減を調べ $1\le i(t)\le\sqrt{2}$より、左の不等式が成立

～$h_n(t)$ は奇関数か、隅関数か～

nが偶数のとき $h_{2m}(t)=t^{2m}+(1-t^2)^m$ で $h_{2m}(t)=h_{2m}(-t)$ より隅関数

nが奇数のとき $h_{2m+1}(t)=t^{2m+1}+(1-t^2)^{\frac{2m+1}{2}}$で$h_{2m+1}(-t)=-t^{2m+1}+(1-t^2)^{\frac{2m+1}{2}}$

から $h_{2m+1}(t)\ne -h_{2m+1}(-t)$ 従って、奇関数でも隅関数でもない。

～$h_n(t)$ に極値を与える t ～

$h_n'(t)=nt\left\{\ t^{n-2}-(1-t^2)^{\frac{1}{2}n-1}\ \right\}=0$ で $t=0$ が一つの解、$t^{n-2}-(1-t^2)^{\frac{1}{2}n-1}=0$

移項・平方して$t^{2(n-2)}=(1-t^2)^{n-2}$これから $t^2=1-t^2$ $t=1\big/\sqrt{2}$となる。$0\le t\le 1\big/\sqrt{2}$

で $h_n'(t)\le 0$、$1\big/\sqrt{2}\le t\le 1$で $h_n'(t)\ge 0$だから $n\ge 3$の整数において$t=0{,}1$で極大値 1、

$t=1\big/\sqrt{2}$ で極小値 $1\big/2^{\frac{n}{2}-1}$ を与える。

～$h_n(t)$ をt で表わした時の t^n の係数の規則性（例)～

先と同様に $n=14$ までの範囲で類推，二項係数が入ってきて符合が入れ替わる。

n が奇数の時は意味をなさない。偶数に限る。

・$n\ge 4$ の偶数の時

n	4	6	8	10	12	14
ア．定数項	1	1	1	1	1	1
イ．t^2，t^{n-1}の項	-2	∓3	-4	∓5	-6	∓7

ウ．t^4，t^{n-2} の項　2　1　± 3　6　± 10　15　± 21

エ．最高次 t^n の項　2　0　2　0　2　0

上記から推定される一般項は次の通り。

ア．1　イ．$\mp\dfrac{n}{2}$　ウ．$\pm\dfrac{1}{8}n(n-2)$　（t^4 の項は $n=4$ で 2）　エ．2，0

但しイ、ウで先頭の t^2，t^4 が複号の上段、t^{n-1}，t^{n-2} が複号の下段の値をとる。

～$h_n(t)$ が n 次式にならない場合

$f_n(t)$ に同じく $n=6,10,14,18$・・・の時、$(n-2)$ 次式になる。上記の表で

t^n の項 が 0 の場合がそれである。（∵ t^n の係数 $1+(-1)^{\frac{1}{2}n}$ ）

注-8）～ $n \le 2$ の場合の不等式 $2^{1-\frac{1}{2}n} \le f_n(t) \le 1$・・・（＊）は条件付きで成り立つ～

$n=2$ のとき 成立、 $n=1$，0 のとき 各々不等号の向きに矛盾

以下、$n=-1$～-4 のときの $f_n(t)$，$f_n{}'(t)$ と $f_n(t)$ の値の範囲を見てみよう。

但し、分母$\neq 0$ より $0<x<\pi/2$ で $1<t\le\sqrt{2}$ となる。

$$f_{-1}(t)=\frac{2t}{t^2-1} \qquad f'_{-1}(t)=\frac{-2(t^2+1)}{(t^2-1)^2} \qquad 2\sqrt{2}\le f_{-1}(t)$$

$$f_{-2}(t)=\frac{4}{(t^2-1)^2} \qquad f'_{-2}(t)=\frac{-16t}{(t^2-1)^3} \qquad 4\le f_{-2}(t)$$

$$f_{-3}(t)=\frac{4t(3-t^2)}{(t^2-1)^3} \qquad f'_{-3}(t)=\frac{-12(1+4t^2-t^4)}{(t^2-1)^4} \qquad 4\sqrt{2}\le f_{-3}(t)$$

$$f_{-4}(t)=\frac{8(1+2t^2-t^4)}{(t^2-1)^4} \qquad f'_{-4}(t)=\frac{-32t(3-t^2)(1+t^2)}{(t^2-1)^5} \qquad 8\le f_{-4}(t)$$

一般に $-n$（$n>0$）のときは　$f_{-n}(t)=\dfrac{1}{\sin^n x}+\dfrac{1}{\cos^n x}=\dfrac{\sin^n x+\cos^n x}{\sin^n x\cos^n x}(>0)$

$f'_{-n}(t)=-n\sin x\cos x(\sin^{-n}x-\cos^{-n}x)=\dfrac{n(\sin^n x-\cos^n x)}{\sin^{n-1}x\cos^{n-1}x}=0$ で（注-6）と同じ

理由から　$f_{-n}(t)=0$　とする x は $\pi/4$ のみで、このとき最小値をとる。

また　$0<\sin^{\frac{n}{2}}2x\le 1$ からも $1\le 1/\sin^{\frac{n}{2}}2x(<\infty)$ で $f_{-n}(x)\ge\dfrac{2}{\sqrt{\sin^n x\cos^n x}}$

$=2^{\frac{n}{2}+1}\Big/\sin^{\frac{n}{2}}2x \ge 2^{\frac{n}{2}+1}$ となるが、この値は(＊)で $-n$ を n で置き換えたもの。

～全体の纏め～

1. 不等式　$2^{1-\frac{1}{2}n} \leq f_n(t) \leq 1$ ・・・(＊)　は

① $n \geq 2$ のすべての整数について成り立つ。

② $n = 1$ のとき $\sqrt{2} \leq t \leq 1$ となり このままでは成立しないが、①と③を繋ぐ結節点と言うべきか。(条件設定分)

③ $n \leq 0$ の整数のときは 左側の不等式 $2^{1-\frac{1}{2}n} \leq f_n(t)$ のみ 成立する。

2. $f_n(t)$ は n の正負にかかわらず n が偶数のとき t の偶関数、奇数のとき t の奇関数になる。証明は（注-2) 1)と同様にでき, $f_{-2n}(t)$ の場合は易しい。(証明略)

$f_{-2n-1}(t) = \sin^{-2n-1} x + \cos^{-2n-1} x$ の場合は

$$f_{-2n-1}(t) = 2^n \left\{ (t+\sqrt{2-t^2})(1+t\sqrt{2-t^2})^n + (t-\sqrt{2-t^2})(1-t\sqrt{2-t^2})^n \right\} \div (t^2-1)^{2n+1}$$

で、$f_{-2n-1}(t) = -f_{-2n-1}(-t)$ となる。

3. $f_{-2n}(t)$, $f_{-2n-1}(t)$ を t で表わす一般公式は（注-2) 1）から下記のようになる。

① 偶関数のとき

$$f_{-2n}(t) = \left\{ (t+\sqrt{2-t^2})/2 \right\}^{-2n} + \left\{ (t-\sqrt{2-t^2})/2 \right\}^{-2n}$$

$$= \frac{2^n \left\{ (1+t\sqrt{2-t^2})^n + (1-t\sqrt{2-t^2})^n \right\}}{(t^2-1)^{2n}}$$ $(n \geq 0)$ であるが、これは $2n$ を $-2n$ に

置き換え計算したに過ぎない。

この公式は見易さや計算の上では使えるし、元の公式は $n \leq 0$ の偶数でも成り立つ。

② 奇関数のとき

同様に $n \leq 0$ の奇数でも元の公式が成り立つ。利用の便宜上置き換え計算したものを掲げると、本頁 2 項 4 行目の $f_{-2n-1}(t)$ $(n \geq 0)$ がそれである。

4. $f_{-2n}(t)$, $f_{-2n-1}(t)$ の各係数を示す公式を作ることができる。(注-2 2)項参照)

5. 本稿では変域を $0 \leq x \leq \pi/2$ に限定したが、例えば $0 \leq x \leq 2\pi$ に拡大すると 次の関係式が成り立つ。

① $n \geq 2$ の偶数のとき　　$2^{1-\frac{n}{2}} \leq f_n(t) \leq 1$

② $n \geq 3$ の奇数のとき　　$-1 \leq f_n(t) \leq 1$

その他、いろいろ興味深い点が出てくるが、限りがないのでこの辺で終りにしたい。