 2011/06/14

別解探求による問題演習と学力アップ(2)

―　ある大学入試問題への９個のアプローチ　―

数実研会員　村田　洋一

昨年 11/27 発表のものと同じテーマを取り上げました。
「別解」という観点からみると図形絡みの問題が解答しやすく、いろいろな問題を調べ検討して下記１．の問題に決め調べてみました。

「別解」を取り上げた趣旨は、前号で述べたことと同じですので割愛します。
問題に対するアプローチの仕方で解答の長さ、困難さが大きく違ってきますが、本問ではとくにその傾向が強いようです。

今回はいくらか共通する解法を含むものの９個の別解を調べてみました。
これら以外の別解を見つけた方は、ご教示願えれば幸甚です。

１．問題と別解の検討

【問　題】

曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$x>0,\ y>0$（$a,\ b$ は $\underline{a>b>0}$ の定数）上の点 $P\ (p,q)$ における接線 l と x 軸との交点を A ，l と y 軸との交点を B とする。
AB の長さの最小値を $a,\ b$ を用いた式で表し、<u>そのときの</u>点 P の<u>座標を定めよ</u>。

～D Slender's Web Site　大学入試数学問題集　いろいろな曲線　問２より
一部改題、アンダーライン部～

【解答１】上記問題に添付の解答　ポイント：シュワルツの不等式による。

点 $P\ (p,q)$ における接線は 公式より $\dfrac{px}{a^2}+\dfrac{qy}{b^2}=1$　従って $A\ (\dfrac{a^2}{p},0)$ $B\ (0,\dfrac{b^2}{q})$

また　$\dfrac{p^2}{a^2}+\dfrac{q^2}{b^2}=1$ (*)であるから シュワルツの不等式より

$$AB^2=\frac{a^4}{p^2}+\frac{b^4}{q^2}=(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2})(\frac{a^4}{p^2}+\frac{b^4}{q^2})\ge(\frac{p}{a}\cdot\frac{a^2}{p}+\frac{q}{b}\cdot\frac{b^2}{q})^2=(a+b)^2$$

等号は $\dfrac{a^2}{p}:\dfrac{p}{a}=\dfrac{b^2}{q}:\dfrac{q}{b}$ から $p^2:q^2=a^3:b^3$ のとき

$p^2=a^3k$, $q^2=b^3k$ として(*) に代入 $k=\dfrac{1}{a+b}$

従って $P\,(\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}},\dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}})$ のとき、AB は最小値 $(a+b)$ をとる。

【解答 2】ポイント：接線を $y=mx+n$ とおき接線を持つ条件 $D=0$ を用いる。

接線を上のようにおき、楕円の方程式に代入し整理すると

$b^2x^2+a^2(mx+n)^2=a^2b^2$ から $(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2-b^2)=0$

接するのでこの二次方程式の判別式 $\dfrac{D}{4}=(a^2mn)^2-a^2(a^2m^2+b^2)(n^2-b^2)=0$

n について解いて $n^2=a^2m^2+b^2$ 第一象限を考えればよいので $n>0$

よって 求める接線は $y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$ $(m<0)$

これから $A\,(-\dfrac{\sqrt{a^2m^2+b^2}}{m},0)$、 $B\,(0,\sqrt{a^2m^2+b^2})$

$$AB^2=\frac{a^2m^2+b^2}{m^2}+a^2m^2+b^2=a^2+b^2+a^2m^2+\frac{b^2}{m^2}$$

$$\geq a^2+b^2+2\sqrt{a^2m^2\cdot\frac{b^2}{m^2}}=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

等号成立は $a^2m^2=\dfrac{b^2}{m^2}$ から $m=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ のとき、ここで $\tan\theta=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ と

おけるので $\dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{b}{a}$ から $\cos^2\theta=\dfrac{a}{a+b}$, $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\dfrac{b}{a+b}$

従って $P\,(\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}},\dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}})$ のとき、AB は最小値 $(a+b)$ をとる。

(接点を連立方程式から求める場合)

接線は $y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}=\sqrt{b}(-\dfrac{x}{\sqrt{a}}+\sqrt{a+b})$ この式を楕円の方程式に

代入して整理すると $(a+b)x^2-2a\sqrt{a}\sqrt{a+b}x+a^3=0$ これが重根を持つので

$(\sqrt{a+b}x-a\sqrt{a})^2=0$ これから $x=\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}$、$y=\dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$

【解答 3】ポイント: $P\ (a\cos\theta, b\sin\theta)$ とし三角関数の公式

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta},\quad 1+\frac{1}{\tan^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$$ を用いる。

接線は $\dfrac{x\cos\theta}{a}+\dfrac{y\sin\theta}{b}=1$ これから $A\ (\dfrac{a}{\cos\theta},0)$、$B\ (0,\dfrac{b}{\sin\theta})$

$$AB^2=\frac{a^2}{\cos^2\theta}+\frac{b^2}{\sin^2\theta}=a^2(1+\tan^2\theta)+b^2(1+\frac{1}{\tan^2\theta})$$

$$\geq a^2+b^2+2\sqrt{a^2\tan^2\theta\cdot\frac{b^2}{\tan^2\theta}}=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

等号成立は $a^2\tan^2\theta=\dfrac{b^2}{\tan^2\theta}$ から $\tan\theta=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ のとき。

以下 解答 2 と同様にして $\cos^2\theta=\dfrac{a}{a+b}$, $\sin^2\theta=\dfrac{b}{a+b}$

このとき $AB^2=\dfrac{a^2}{\dfrac{a}{a+b}}+\dfrac{b^2}{\dfrac{b}{a+b}}=a(a+b)+b(a+b)=(a+b)^2$

従って $P\ (\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}},\dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}})$ のとき、AB は最小値 $(a+b)$ をとる。

【解答 4】ポイント: $P\ (a\cos\theta, b\sin\theta)$ とし AB^2 に $1=\sin^2\theta+\cos^2\theta$ を掛けて変形。

$$AB^2=(\frac{a^2}{\cos^2\theta}+\frac{b^2}{\sin^2\theta})(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=a^2+b^2+a^2\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+b^2\cdot\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$\geq a^2+b^2+2\sqrt{\frac{a^2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\frac{b^2\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}=(a+b)^2$$

等号成立は $\dfrac{a^2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{b^2\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$ から $\tan\theta=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ のとき。

以下、解答 2 と同様に計算できる。

【解答 5】ポイント: $P\ (a\cos\theta, b\sin\theta)$, 接線の傾きを m とし AB^2 を m,a,b で表す。

接線は $\dfrac{x\cos\theta}{a}+\dfrac{y\sin\theta}{b}=1$ から $y=-\dfrac{b\sin\theta}{a\cos\theta}x+\dfrac{b}{\sin\theta}$

$m=-\dfrac{b\cos\theta}{a\sin\theta}$ とおくと $\sin\theta=-\dfrac{b\cos\theta}{ma}$, $\cos\theta=-\dfrac{ma}{b}\sin\theta$

前者を $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入して $\dfrac{b^2\cos^2\theta}{m^2a^2}+\cos^2\theta=1$ から

$\cos^2\theta=\dfrac{m^2a^2}{m^2a^2+b^2}$ を得る。 また $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\dfrac{b^2}{m^2a^2+b^2}$

$$\therefore\ AB^2=\frac{m^2a^2+b^2}{m^2}+m^2a^2+b^2\geq a^2+b^2+2\sqrt{\frac{b^2}{m^2}\cdot m^2a^2}=(a+b)^2$$

等号成立は $m^2a^2=\dfrac{b^2}{m^2}$ 即ち $m=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ のとき

従って $m=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ のとき、AB は最小値 $(a+b)$ をとる

尚、接点は $m=-\dfrac{b\cos\theta}{a\sin\theta}$ に代入して $-\sqrt{\dfrac{b}{a}}=\dfrac{b}{a\tan\theta}$ から $\tan\theta=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

以下 解答 2 と同様に $\cos^2\theta,\sin^2\theta$ を求め 所要の答を得る。

【解答 6】 ポイント：$P\ (a\cos\theta,b\sin\theta)$ とし、AB^2 で $\sin^2\theta=X(0<X<1)$ として微分を利用する。

$AB^2=\dfrac{a^2}{1-\sin^2\theta}+\dfrac{b^2}{\sin^2\theta}=\dfrac{(a^2-b^2)\sin^2\theta+b^2}{\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)}$ $\sin^2\theta=X(0<X<1)$ と

して $AB^2=f(X)=\dfrac{(a^2-b^2)X+b^2}{X(1-X)}$ とする。

$f'(X)=\dfrac{(a^2-b^2)X^2+2b^2X-b^2}{X^2(1-X)^2}=\dfrac{\{(a+b)X-b\}\{(a-b)X+b\}}{X^2(1-X)^2}$ $f'(X)$ の

分母>0, 分子は $0<X<\dfrac{b}{a+b}$ で $f'(X)<0$, $\dfrac{b}{a+b}<X<1$ で $f'(X)>0$ より

$f(X)$ は $X=\dfrac{b}{a+b}$ で最小値をとる。これから $\cos^2\theta=\dfrac{a}{a+b}$, $\sin^2\theta=\dfrac{b}{a+b}$

$f(\dfrac{b}{a+b})=\dfrac{a^2}{1-\dfrac{b}{a+b}}+\dfrac{b^2}{\dfrac{b}{a+b}}=(a+b)^2$ から AB の最小値は $(a+b)$

これから所要の答を得る。 ～注) $\cos^2\theta=X(0<X<1)$ でもほぼ同様に解答可～

【解答 7】 ポイント：$P\ (p,q)$ とおき AB^2 を p の関数で, 引続き $\dfrac{p^2}{a^2}=t$ の関数で表して簡単化し 微分により求める。

$\dfrac{p^2}{a^2}+\dfrac{q^2}{b^2}=1$ の両辺を p で微分して $\dfrac{2p}{a^2}+\dfrac{2q}{b^2}\cdot\dfrac{dq}{dp}=0$，接線の傾き $m=-\dfrac{b^2p}{a^2q}$

より 接線は $y-q=m(x-p)$　 $y=0$，$x=0$ から　$A\ (p-\dfrac{q}{m},0)$、$B\ (0,q-mp)$

また $p-\dfrac{q}{m}=p+\dfrac{a^2q^2}{b^2p}=\dfrac{b^2p^2+a^2q^2}{b^2p}=\dfrac{a^2b^2}{b^2p}=\dfrac{a^2}{p}$　同様に　$q-mp=\dfrac{b^2}{q}$

$AB^2=\dfrac{a^4}{p^2}+\dfrac{b^4}{q^2}=\dfrac{a^4}{p^2}+\dfrac{a^2b^2}{a^2-p^2}$　（$\because$　$q^2=\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-p^2)$）

ここで　$\dfrac{p^2}{a^2}=t$　とおくと　$AB^2=\dfrac{a^2}{t}+\dfrac{b^2}{1-t}(0<t<1)$

$\dfrac{d}{dt}AB^2=-\dfrac{a^2}{t^2}+\dfrac{b^2}{(1-t)^2}=\dfrac{b^2t^2-a^2(1-t)^2}{t^2(1-t)^2}=0$　から　分母>0、分子は

$-(a^2-b^2)t^2+2a^2t-a^2=0$　　$t=\dfrac{a^2\pm ab}{a^2-b^2}$ から $t=\dfrac{a}{a+b}\ or\ \dfrac{a}{a-b}$

$0<\dfrac{a}{a+b}<1<\dfrac{a}{a-b}$ で $t=\dfrac{a}{a+b}$ の前後で $\dfrac{d}{dt}AB^2$ の符号が$(-)$から（+）

に変わるからこの点で最小値をとる。

$AB^2=\dfrac{a^2}{\dfrac{a}{a+b}}+\dfrac{b^2}{1-\dfrac{a}{a+b}}=(a+b)^2$，　$\dfrac{p^2}{a^2}=\dfrac{a}{a+b}$，　$q^2=\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-\dfrac{a}{a+b})$

から　$P\ (\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}},\dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}})$ のとき、AB は最小値$(a+b)$をとる。

【解答 8】ポイント：$P\ (p,q)$ とおき、AB^2 を p の関数で表し微分する力技の解答。

点 P における接線は　公式より　$\dfrac{px}{a^2}+\dfrac{qy}{b^2}=1$　従って $A\ (\dfrac{a^2}{p},0)$、$B\ (0,\dfrac{b^2}{q})$

$AB^2=\dfrac{a^4}{p^2}+\dfrac{b^4}{q^2}=\dfrac{a^4}{p^2}+\dfrac{a^2b^2}{a^2-p^2}=\dfrac{a^2\left\{a^4-(a^2-b^2)p^2\right\}}{p^2(a^2-p^2)}$　（$\because\ q^2=\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-p^2)$）

$AB^2=f(p)$ とおく。　微分して　$f'(p)=\dfrac{-2a^2\left\{(a^2-b^2)p^4-2a^4p^2+a^6\right\}}{p^3(a^2-p^2)^2}$

$0<p<a$ より　分母>0

$\{\ \}$内＝$\left\{(a+b)p^2-a^3\right\}\left\{(a-b)p^2-a^3\right\}=0$　から　$p^2=\dfrac{a^3}{a+b}\ or\ \dfrac{a^3}{a-b}$

$\dfrac{a^3}{a+b}<\dfrac{a^3}{a-b}$　より　$p^2=\dfrac{a^3}{a+b}$ の前後で $f'(p)$ の符号が$(-)$から（+）へ変化

するのでこの点で最小値をとる。

$$AB^2 = \frac{a^4}{\frac{a^3}{a+b}} + \frac{a^2b^2}{a^2 - \frac{a^3}{a+b}} = (a+b)^2 \qquad p = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}、\quad q^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \frac{a^3}{a+b})$$

から　$q = \dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$　　これらから所要の答を得る。

【解答 9】ポイント：$P\ (a\cos\theta, b\sin\theta)$ とし $f(\theta)$ 、$f'(\theta)$ を 倍角で表す。

$$AB^2 = f(\theta) = \frac{2a^2}{1+\cos 2\theta} + \frac{2b^2}{1-\cos 2\theta} = \frac{-2\{(a^2-b^2)\cos 2\theta - (a^2+b^2)\}}{\sin^2 2\theta}$$

$$f'(\theta) = \frac{4(a^2-b^2)\sin^3 2\theta + 2\cdot 4\sin 2\theta\cos 2\theta\{(a^2-b^2)\cos 2\theta - (a^2+b^2)\}}{\sin^4 2\theta}$$

$$= \frac{8(a^2-b^2)\cos^2 2\theta - 8(a^2+b^2)\cos 2\theta + 4(a^2-b^2)(1-\cos^2 2\theta)}{\sin^3 2\theta}$$

$$= \frac{4\{(a^2-b^2)\cos^2 2\theta - 2(a^2+b^2)\cos 2\theta + (a^2-b^2)\}}{\sin^3 2\theta}$$

$$= \frac{4\{(a+b)\cos 2\theta - (a-b)\}\{(a-b)\cos 2\theta - (a+b)\}}{\sin^3 2\theta} \quad \cdot\cdot\cdot (*)$$

$f'(\theta) = 0$　から　$\cos 2\theta = \dfrac{a-b}{a+b} or \dfrac{a+b}{a-b}$　　$0 < \dfrac{a-b}{a+b} < 1 < \dfrac{a+b}{a-b}$　より

$0 < \cos 2\theta < 1$　　$0 < 2\theta < \dfrac{\pi}{2}$　で　$0 < \sin 2\theta < 1$　　∴ 分母>0

$\cos 2\theta = \dfrac{a-b}{a+b}$　の前後で $f'(\theta)$ の符号が(－)から(+)へ変化する（$-(a+b) <$（＊）分子第 2 項$< -2b$ で常に負に注意）のでこの点で最小値をとる。

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \dfrac{a-b}{a+b}$　から　$\cos^2\theta = \dfrac{a}{a+b}$,　$\sin^2\theta = \dfrac{b}{a+b}$

これらから所要の答を得る。

注）$f(\theta) = \dfrac{a^2}{\cos^2\theta} + \dfrac{b^2}{\sin^2\theta}$ から　$f'(\theta) = \dfrac{2a^2\sin\theta}{\cos^3\theta} - \dfrac{2b^2\cos\theta}{\sin^3\theta}$

$= \dfrac{2(a\sin^2\theta + b\cos^2\theta)(a\sin^2\theta - b\cos^2\theta)}{\sin^3\theta\cos^3\theta}$ として 分母＞0

分子第 1 項＞0 より $f'(\theta)$ の符号は第 2 項で決まるので，$\tan^2\theta = b/a$ のとき極値をとるとしても良い。

以　上