

別解探求による問題演習と学力アップ(2)

— ある大学入試問題への9個のアプローチ —

数実研会員 村田 洋一

昨年 11/27 発表のものと同じテーマを取り上げました。

「別解」という観点からみると図形絡みの問題が解答しやすく、いろいろな問題を調べ検討して下記 1. の問題に決め調べてみました。

「別解」を取り上げた趣旨は、前号で述べたことと同じですので割愛します。問題に対するアプローチの仕方によって解答の長さ、困難さが大きく違ってきますが、本問ではとくにその傾向が強いようです。

今回はいくらか共通する解法を含むものの 9 個の別解を調べてみました。これら以外の別解を見つけた方は、ご教示願えれば幸甚です。

1. 問題と別解の検討

【問題】

曲線 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x > 0, y > 0$ (a, b は $a > b > 0$ の定数) 上の点 $P(p, q)$ に

おける接線 l と x 軸との交点を A , l と y 軸との交点を B とする。

AB の長さの最小値を a, b を用いた式で表し、そのときの点 P の座標を定めよ。

～D Slender's Web Site 大学入試数学問題集 いろいろな曲線 問 2 より
一部改題、アンダーライン部～

【解答 1】 上記問題に添付の解答 ポイント：シュワルツの不等式による。

点 $P(p, q)$ における接線は 公式より $\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1$ 従って $A(\frac{a^2}{p}, 0)$ $B(0, \frac{b^2}{q})$

また $\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1$ (*) であるから シュワルツの不等式より

$$AB^2 = \frac{a^4}{p^2} + \frac{b^4}{q^2} = (\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2})(\frac{a^4}{p^2} + \frac{b^4}{q^2}) \geq (\frac{p}{a} \cdot \frac{a^2}{p} + \frac{q}{b} \cdot \frac{b^2}{q})^2 = (a+b)^2$$

等号は $\frac{a^2}{p} : \frac{p}{a} = \frac{b^2}{q} : \frac{q}{b}$ から $p^2 : q^2 = a^3 : b^3$ のとき

$$p^2 = a^3k, \quad q^2 = b^3k \quad \text{として(*) に代入} \quad k = \frac{1}{a+b}$$

従って $P\left(\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}, \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}\right)$ のとき、 AB は最小値 $(a+b)$ をとる。

【解答 2】ポイント：接線を $y = mx + n$ とおき接線を持つ条件 $D = 0$ を用いる。

接線を上のようにおき、楕円の方程式に代入し整理すると

$$b^2x^2 + a^2(mx+n)^2 = a^2b^2 \quad \text{から} \quad (a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2(n^2 - b^2) = 0$$

接するのでこの二次方程式の判別式 $\frac{D}{4} = (a^2mn)^2 - a^2(a^2m^2 + b^2)(n^2 - b^2) = 0$

n について解いて $n^2 = a^2m^2 + b^2$ 第一象限を考えればよいので $n > 0$

よって 求める接線は $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2} \quad (m < 0)$

これから $A\left(-\frac{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}{m}, 0\right)$ 、 $B(0, \sqrt{a^2m^2 + b^2})$

$$\begin{aligned} AB^2 &= \frac{a^2m^2 + b^2}{m^2} + a^2m^2 + b^2 = a^2 + b^2 + a^2m^2 + \frac{b^2}{m^2} \\ &\geq a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2m^2 \cdot \frac{b^2}{m^2}} = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \end{aligned}$$

等号成立は $a^2m^2 = \frac{b^2}{m^2}$ から $m = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ のとき、ここで $\tan\theta = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ と

おけるので $\frac{1 - \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{b}{a}$ から $\cos^2\theta = \frac{a}{a+b}$ 、 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \frac{b}{a+b}$

従って $P\left(\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}, \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}\right)$ のとき、 AB は最小値 $(a+b)$ をとる。

(接点を連立方程式から求める場合)

接線は $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2} = \sqrt{b}\left(-\frac{x}{\sqrt{a}} + \sqrt{a+b}\right)$ この式を楕円の方程式に

代入して整理すると $(a+b)x^2 - 2a\sqrt{a}\sqrt{a+b}x + a^3 = 0$ これが重根を持つので

$$(\sqrt{a+bx} - a\sqrt{a})^2 = 0 \quad \text{これから} \quad x = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}, \quad y = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$$

【解答 3】 ポイント: $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$ とし三角関数の公式

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}, \quad 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad \text{を用いる。}$$

$$\text{接線は } \frac{x \cos \theta}{a} + \frac{y \sin \theta}{b} = 1 \quad \text{これから } A\left(\frac{a}{\cos \theta}, 0\right), B\left(0, \frac{b}{\sin \theta}\right)$$

$$\begin{aligned} AB^2 &= \frac{a^2}{\cos^2 \theta} + \frac{b^2}{\sin^2 \theta} = a^2(1 + \tan^2 \theta) + b^2\left(1 + \frac{1}{\tan^2 \theta}\right) \\ &\geq a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2 \tan^2 \theta \cdot \frac{b^2}{\tan^2 \theta}} = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \end{aligned}$$

$$\text{等号成立は } a^2 \tan^2 \theta = \frac{b^2}{\tan^2 \theta} \quad \text{から } \tan \theta = -\sqrt{\frac{b}{a}} \quad \text{のとき。}$$

$$\text{以下 解答 2 と同様にして } \cos^2 \theta = \frac{a}{a+b}, \quad \sin^2 \theta = \frac{b}{a+b}$$

$$\text{このとき } AB^2 = \frac{a^2}{\frac{a}{a+b}} + \frac{b^2}{\frac{b}{a+b}} = a(a+b) + b(a+b) = (a+b)^2$$

従って $P\left(\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}, \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}\right)$ のとき、 AB は最小値 $(a+b)$ をとる。

【解答 4】 ポイント: $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$ とし AB^2 に $1 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ を掛けて変形。

$$\begin{aligned} AB^2 &= \left(\frac{a^2}{\cos^2 \theta} + \frac{b^2}{\sin^2 \theta}\right)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = a^2 + b^2 + a^2 \cdot \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + b^2 \cdot \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ &\geq a^2 + b^2 + 2\sqrt{\frac{a^2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{b^2 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}} = (a+b)^2 \end{aligned}$$

$$\text{等号成立は } \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{b^2 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \quad \text{から } \tan \theta = -\sqrt{\frac{b}{a}} \quad \text{のとき。}$$

以下、解答 2 と同様に計算できる。

【解答 5】 ポイント: $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$, 接線の傾きを m とし AB^2 を m, a, b で表す。

$$\text{接線は } \frac{x \cos \theta}{a} + \frac{y \sin \theta}{b} = 1 \quad \text{から } y = -\frac{b \sin \theta}{a \cos \theta} x + \frac{b}{\sin \theta}$$

$$m = -\frac{b \cos \theta}{a \sin \theta} \quad \text{とおくと } \sin \theta = -\frac{b \cos \theta}{ma}, \quad \cos \theta = -\frac{ma}{b} \sin \theta$$

前者を $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ に代入して $\frac{b^2 \cos^2 \theta}{m^2 a^2} + \cos^2 \theta = 1$ から

$$\cos^2 \theta = \frac{m^2 a^2}{m^2 a^2 + b^2} \text{ を得る。 また } \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = \frac{b^2}{m^2 a^2 + b^2}$$

$$\therefore AB^2 = \frac{m^2 a^2 + b^2}{m^2} + m^2 a^2 + b^2 \geq a^2 + b^2 + 2\sqrt{\frac{b^2}{m^2} \cdot m^2 a^2} = (a+b)^2$$

$$\text{等号成立は } m^2 a^2 = \frac{b^2}{m^2} \text{ 即ち } m = -\sqrt{\frac{b}{a}} \text{ のとき}$$

従って $m = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ のとき、 AB は最小値 $(a+b)$ をとる

$$\text{尚、接点は } m = -\frac{b \cos \theta}{a \sin \theta} \text{ に代入して } -\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{b}{a \tan \theta} \text{ から } \tan \theta = -\sqrt{\frac{b}{a}}$$

以下 解答 2 と同様に $\cos^2 \theta, \sin^2 \theta$ を求め 所要の答を得る。

【解答 6】 ポイント： $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$ とし、 AB^2 で $\sin^2 \theta = X (0 < X < 1)$ と
して微分を利用する。

$$AB^2 = \frac{a^2}{1 - \sin^2 \theta} + \frac{b^2}{\sin^2 \theta} = \frac{(a^2 - b^2) \sin^2 \theta + b^2}{\sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta)} \quad \sin^2 \theta = X (0 < X < 1) \text{ と}$$

$$\text{して } AB^2 = f(X) = \frac{(a^2 - b^2)X + b^2}{X(1-X)} \text{ とする。}$$

$$f'(X) = \frac{(a^2 - b^2)X^2 + 2b^2X - b^2}{X^2(1-X)^2} = \frac{\{(a+b)X - b\}\{(a-b)X + b\}}{X^2(1-X)^2} \quad f'(X) \text{ の}$$

分母 > 0 , 分子は $0 < X < \frac{b}{a+b}$ で $f'(X) < 0$, $\frac{b}{a+b} < X < 1$ で $f'(X) > 0$ より

$$f(X) \text{ は } X = \frac{b}{a+b} \text{ で最小値をとる。これから } \cos^2 \theta = \frac{a}{a+b}, \sin^2 \theta = \frac{b}{a+b}$$

$$f\left(\frac{b}{a+b}\right) = \frac{a^2}{1 - \frac{b}{a+b}} + \frac{b^2}{\frac{b}{a+b}} = (a+b)^2 \text{ から } AB \text{ の最小値は } (a+b)$$

これから所要の答を得る。～注) $\cos^2 \theta = X (0 < X < 1)$ でもほぼ同様に解答可～

【解答 7】 ポイント： $P(p, q)$ とおき AB^2 を p の関数で、引続き $\frac{p^2}{a^2} = t$ の関数で

表して簡単化し 微分により求める。

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1 \text{ の両辺を } p \text{ で微分して } \frac{2p}{a^2} + \frac{2q}{b^2} \cdot \frac{dq}{dp} = 0, \text{ 接線の傾き } m = -\frac{b^2 p}{a^2 q}$$

より 接線は $y - q = m(x - p)$ $y = 0, x = 0$ から $A(p - \frac{q}{m}, 0), B(0, q - mp)$

$$\text{また } p - \frac{q}{m} = p + \frac{a^2 q^2}{b^2 p} = \frac{b^2 p^2 + a^2 q^2}{b^2 p} = \frac{a^2 b^2}{b^2 p} = \frac{a^2}{p} \text{ 同様に } q - mp = \frac{b^2}{q}$$

$$AB^2 = \frac{a^4}{p^2} + \frac{b^4}{q^2} = \frac{a^4}{p^2} + \frac{a^2 b^2}{a^2 - p^2} \quad (\because q^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - p^2))$$

$$\text{ここで } \frac{p^2}{a^2} = t \text{ とおくと } AB^2 = \frac{a^2}{t} + \frac{b^2}{1-t} \quad (0 < t < 1)$$

$$\frac{d}{dt} AB^2 = -\frac{a^2}{t^2} + \frac{b^2}{(1-t)^2} = \frac{b^2 t^2 - a^2 (1-t)^2}{t^2 (1-t)^2} = 0 \text{ から 分母} > 0, \text{ 分子は}$$

$$-(a^2 - b^2)t^2 + 2a^2 t - a^2 = 0 \quad t = \frac{a^2 \pm ab}{a^2 - b^2} \text{ から } t = \frac{a}{a+b} \text{ or } \frac{a}{a-b}$$

$$0 < \frac{a}{a+b} < 1 < \frac{a}{a-b} \text{ で } t = \frac{a}{a+b} \text{ の前後で } \frac{d}{dt} AB^2 \text{ の符号が } (-) \text{ から } (+)$$

に変わるからこの点で最小値をとる。

$$AB^2 = \frac{a^2}{\frac{a}{a+b}} + \frac{b^2}{1 - \frac{a}{a+b}} = (a+b)^2, \quad \frac{p^2}{a^2} = \frac{a}{a+b}, \quad q^2 = \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 - \frac{a}{a+b} \right)$$

から $P\left(\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}, \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}\right)$ のとき、 AB は最小値 $(a+b)$ をとる。

【解答 8】 ポイント： $P(p, q)$ とおき、 AB^2 を p の関数で表し微分する力技の解答。

点 P における接線は 公式より $\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1$ 従って $A\left(\frac{a^2}{p}, 0\right), B\left(0, \frac{b^2}{q}\right)$

$$AB^2 = \frac{a^4}{p^2} + \frac{b^4}{q^2} = \frac{a^4}{p^2} + \frac{a^2 b^2}{a^2 - p^2} = \frac{a^2 \{ a^4 - (a^2 - b^2)p^2 \}}{p^2 (a^2 - p^2)} \quad (\because q^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - p^2))$$

$$AB^2 = f(p) \text{ とおく。 微分して } f'(p) = \frac{-2a^2 \{ (a^2 - b^2)p^4 - 2a^4 p^2 + a^6 \}}{p^3 (a^2 - p^2)^2}$$

$0 < p < a$ より 分母 > 0

$$\{ \} \text{内} = \{ (a+b)p^2 - a^3 \} \{ (a-b)p^2 - a^3 \} = 0 \text{ から } p^2 = \frac{a^3}{a+b} \text{ or } \frac{a^3}{a-b}$$

$\frac{a^3}{a+b} < \frac{a^3}{a-b}$ より $p^2 = \frac{a^3}{a+b}$ の前後で $f'(p)$ の符号が $(-)$ から $(+)$ へ変化

するのでこの点で最小値をとる。

$$AB^2 = \frac{a^4}{a^3} + \frac{a^2 b^2}{a^2 - \frac{a^3}{a+b}} = (a+b)^2 \quad p = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}, \quad q^2 = \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 - \frac{a^3}{a+b} \right)$$

から $q = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$ これらから所要の答を得る。

【解答 9】 ポイント : $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$ とし $f(\theta)$ 、 $f'(\theta)$ を 倍角で表す。

$$\begin{aligned} AB^2 = f(\theta) &= \frac{2a^2}{1 + \cos 2\theta} + \frac{2b^2}{1 - \cos 2\theta} = \frac{-2\{(a^2 - b^2) \cos 2\theta - (a^2 + b^2)\}}{\sin^2 2\theta} \\ f'(\theta) &= \frac{4(a^2 - b^2) \sin^3 2\theta + 2 \cdot 4 \sin 2\theta \cos 2\theta \{(a^2 - b^2) \cos 2\theta - (a^2 + b^2)\}}{\sin^4 2\theta} \\ &= \frac{8(a^2 - b^2) \cos^2 2\theta - 8(a^2 + b^2) \cos 2\theta + 4(a^2 - b^2)(1 - \cos^2 2\theta)}{\sin^3 2\theta} \\ &= \frac{4\{(a^2 - b^2) \cos^2 2\theta - 2(a^2 + b^2) \cos 2\theta + (a^2 - b^2)\}}{\sin^3 2\theta} \\ &= \frac{4\{(a+b) \cos 2\theta - (a-b)\} \{(a-b) \cos 2\theta - (a+b)\}}{\sin^3 2\theta} \quad \dots (*) \end{aligned}$$

$$f'(\theta) = 0 \quad \text{から} \quad \cos 2\theta = \frac{a-b}{a+b} \text{ or } \frac{a+b}{a-b} \quad 0 < \frac{a-b}{a+b} < 1 < \frac{a+b}{a-b} \quad \text{より}$$

$$0 < \cos 2\theta < 1 \quad 0 < 2\theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{で} \quad 0 < \sin 2\theta < 1 \quad \therefore \text{分母} > 0$$

$$\cos 2\theta = \frac{a-b}{a+b} \quad \text{の前後で } f'(\theta) \text{ の符号が } (-) \text{ から } (+) \text{ へ変化する } \quad -(a+b) <$$

(*) 分子第 2 項 $< -2b$ で常に負に注意) のでこの点で最小値をとる。

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = \frac{a-b}{a+b} \quad \text{から} \quad \cos^2 \theta = \frac{a}{a+b}, \quad \sin^2 \theta = \frac{b}{a+b}$$

これらから所要の答を得る。

$$\begin{aligned} \text{注) } f(\theta) &= \frac{a^2}{\cos^2 \theta} + \frac{b^2}{\sin^2 \theta} \quad \text{から} \quad f'(\theta) = \frac{2a^2 \sin \theta}{\cos^3 \theta} - \frac{2b^2 \cos \theta}{\sin^3 \theta} \\ &= \frac{2(a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta)(a \sin^2 \theta - b \cos^2 \theta)}{\sin^3 \theta \cos^3 \theta} \quad \text{として 分母} > 0 \end{aligned}$$

分子第 1 項 > 0 より $f'(\theta)$ の符号は第 2 項で決まるので、 $\tan^2 \theta = b/a$ のとき極値をとるとしても良い。

以 上