—私の数学散歩道(5)—　　2010/11/27

別解探求による問題演習と学力アップ

—　ある大学入試問題への９個のアプローチ　—

数実研会員　村田　洋一

１．はじめに

学力がつき余裕ができると 「別解がないか」、と考えるのは自然のように思います。すべての問題が別解を持つものでありませんが、常にこのような眼で見ていると多面的な方向から一つの問題を攻めるフレキシブルな頭脳ができてきます。

ひいては要領の良いコンパクトな答案の作成のみならず、実力の涵養に役立ちます。
今回、下記の２次曲線の問題につき、いくらか共通する解法を含むものの ９個の別解を調べてみました。これら以外の別解を見つけた方は、ご教示願えれば幸甚です。
正攻法から図形の性質の利用、ベクトルの応用やウルトラＣ級の解法まであります。

このような問題をいくつか纏めて演習用のデータベースができれば面白く、その一環となれば、と思い 作成・報告する次第です。

２．問題と別解の検討

【問　題】

双曲線　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$　がある。ただし、$a>0,\quad b>0$ とする。

双曲線上の点Ｐ (p,q)（但し $p>0,\ q>0$）を通り、２つの漸近線に平行な直線を引きそれぞれが漸近線と交わる点をＱ，Ｒとする。

この時 平行四辺形 OQPR（O は原点）の面積は点Ｐの位置にかかわらず一定であることを示し、その面積を求めよ。　　（名古屋市立大　一部改作）

【解答１】　ポイント：交点の座標→面積計算

右図のように交点Ｑ，Ｒをとる。Ｐは双曲線上の点より　　＊グラフは席上配布の資料を参照願います。

$\dfrac{p^2}{a^2}-\dfrac{q^2}{b^2}=1$　従って　$b^2p^2-a^2q^2=a^2b^2$ ・・・①

直線 PQ の方程式は　$y-q=-\dfrac{b}{a}(x-p)$ ・・・②　　P、Q は第一象限、R は第二象限。

直線 OQ の方程式は　　$y=\dfrac{b}{a}x$　　・・・③

②，③を解いて　　$Q\left(\dfrac{aq+bp}{2b},\dfrac{aq+bp}{2a}\right)$

同様に R の座標は　　$R\left(-\dfrac{aq-bp}{2b},\dfrac{aq-bp}{2a}\right)$

平行四辺形 OQPR の面積 S は 公式より

$$S=2\times\frac{1}{2}\left|\frac{aq+bp}{2b}\cdot\frac{aq-bp}{2a}-\frac{aq+bp}{2a}\cdot\left(-\frac{aq-bp}{2b}\right)\right|=\frac{\left|a^2q^2-b^2p^2\right|}{2ab}=\frac{1}{2}ab$$

従って S は P の位置に関わらず一定で、その面積は $\dfrac{1}{2}ab$　である。

【解答２】ポイント：Ｐから各漸近線への垂線の長さを計算→直線 PQ，OQ のなす角 α の正弦の計算→$(PQ\cdot PR)\div\sin\alpha$　で面積算出

$\dfrac{p^2}{a^2}-\dfrac{q^2}{b^2}=1$　従って $b^2p^2-a^2q^2=a^2b^2$ ・・・①

漸近線は　　$bx+ay=0$　　・・・②

$bx-ay=0$　　・・・③

Ｐから漸近線②、③に平行線を引き他方と交わる点をそれぞれ Q，R とする。
またＰから②、③への垂線の足をそれぞれ H，I とすると

$$PH=\frac{|bp+aq|}{\sqrt{a^2+b^2}}\qquad PI=\frac{|bp-aq|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

②、③のなす角を α　とすると

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{b}{a}\qquad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{a^2}{a^2+b^2}$$

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\tan\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

$PR=\dfrac{PH}{\sin\alpha}$、$PQ=\dfrac{PI}{\sin\alpha}$　で平行四辺形 OQPR＝PQ・PR $\sin\alpha$　から

$$S=(PQ\cdot PR)\div\sin\alpha=\frac{a^2+b^2}{2ab}\cdot\frac{|bp+aq|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{|bp-aq|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{2}ab$$

【解答３】　ポイント：交点の座標→辺 PQ，PR の長さの計算→漸近線 OQ と x軸のなす角をs, 同 OR とx軸のなす角をtとして$\sin\alpha=\sin(s-t)$ を計算→面積算出

【解答１】の座標 Q、R から

$$PQ^2=(p-\frac{aq+bp}{2b})^2+(q-\frac{aq+bp}{2a})^2=\frac{1}{4}(p-\frac{aq}{b})^2+\frac{1}{4}(q-\frac{bq}{a})^2$$

$$=\frac{1}{4b^2}(bp-aq)^2+\frac{1}{4a^2}(aq-bp)^2=\frac{a^2+b^2}{4a^2b^2}(aq-bp)^2$$

$$PR^2=(p+\frac{aq-bp}{2b})^2+(q-\frac{aq-bp}{2a})^2=\frac{1}{4}(p+\frac{aq}{b})^2+\frac{1}{4}(q+\frac{bq}{a})^2$$

$$=\frac{1}{4b^2}(bp+aq)^2+\frac{1}{4a^2}(aq+bp)^2=\frac{a^2+b^2}{4a^2b^2}(aq+bp)^2$$

直線③、②がx軸となす角を各々s,t；角 QOR を α とすると

$$\tan\alpha=\tan(s-t)=\frac{\tan s-\tan t}{1+\tan s\tan t}=\frac{\frac{b}{a}-(-\frac{b}{a})}{1+\frac{b}{a}(-\frac{b}{a})}=\frac{2ab}{a^2-b^2}$$

一方　$1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$　より　$\sin^2\alpha=\dfrac{1}{1+\dfrac{(a^2-b^2)^2}{4a^2b^2}}=\dfrac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}$から

S＝ $PQ\cdot PR\sin\alpha=\dfrac{a^2+b^2}{4}\cdot\dfrac{2ab}{a^2+b^2}=\dfrac{1}{2}ab$

【解答４】　ポイント：交点 Q,R の座標→図形の性質より S＝OQ・OR$\sin\alpha$ で計算

題意から図形 OQPR は平行四辺形であるから

PQ＝OR,　PR＝OQ　より

$$OQ^2=\frac{(aq+bp)^2}{4b^2}+\frac{(aq+bp)^2}{4a^2}=\frac{a^2+b^2}{4a^2b^2}(aq+bp)^2$$

同様に　$OR^2=\dfrac{(aq-bp)^2}{4b^2}+\dfrac{(aq-bp)^2}{4a^2}=\dfrac{a^2+b^2}{4a^2b^2}(aq-bp)^2$

よって　S＝OQ・OR$\sin\alpha=\dfrac{a^2+b^2}{4}\sin\alpha=\dfrac{1}{2}ab$

【解答５】　ポイント：交点 Q の座標から OQ, P から③におろした垂線の足を I として PI を各々計算→S＝OQ・PI による。

前問同様 $OQ^2=\dfrac{a^2+b^2}{4a^2b^2}(aq+bp)^2$ より $OQ=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}|aq+bp|$

Ｐから直線③におろした垂線の足をＩとすると

PI＝$\dfrac{|bp-aq|}{\sqrt{a^2+b^2}}$　　従って　S＝$\dfrac{|b^2p^2-a^2q^2|}{2ab}=\dfrac{1}{2}ab$

注）OR を求め、P から直線②におろした垂線の足を H として PH から S を出しても同じ。

【解答６】　ポイント：三角関数による通常の媒介変数表示を利用、そのあとは【解答１】の後段、【解答４】に同じ。

P$(\dfrac{a}{\cos\theta},b\tan\theta)$ とする。漸近線は　$y=\dfrac{b}{a}x$・・②、　$y=\dfrac{b}{a}x$・・③より

直線 PQ：　$y-b\tan\theta=-\dfrac{b}{a}(x-\dfrac{a}{\cos\theta})$　・・④

直線 PR：　$y-b\tan\theta=\dfrac{b}{a}(x-\dfrac{a}{\cos\theta})$　・・・⑤

③と④の交点 Q,　②と⑤の交点 R は

Q$(\dfrac{a(1+\sin\theta)}{2\cos\theta},\dfrac{b(1+\sin\theta)}{2\cos\theta})$、　R$(\dfrac{a(1-\sin\theta)}{2\cos\theta},-\dfrac{b(1-\sin\theta)}{2\cos\theta})$

$$OQ^2=\frac{a^2(1+\sin\theta)^2+b^2(1+\sin\theta)^2}{4\cos^2\theta}=\frac{a^2+b^2}{4\cos^2\theta}(1+\sin\theta)^2$$

$$OR^2=\frac{a^2(1-\sin\theta)^2+b^2(1-\sin\theta)^2}{4\cos^2\theta}=\frac{a^2+b^2}{4\cos^2\theta}(1-\sin\theta)^2$$

$$OQ^2\cdot OR^2=\frac{(a^2+b^2)^2(1-\sin^2\theta)^2}{16\cos^4\theta}=\frac{(a^2+b^2)^2}{16}$$

直線②．③のなす角をαとすると

S＝$OQ\cdot OR\sin\alpha=\dfrac{1}{2}ab$　　　　あるいは

S＝$\left|\dfrac{a(1+\sin\theta)}{2\cos\theta}\cdot\dfrac{-b(1-\sin\theta)}{2\cos\theta}-\dfrac{b(1+\sin\theta)}{2\cos\theta}\cdot\dfrac{a(1-\sin\theta)}{2\cos\theta}\right|=\dfrac{|-2ab\cos^2\theta|}{4\cos^2\theta}=\dfrac{1}{2}ab$

【解答７】　ポイント：双曲線の形から新たな媒介変数表示を考える。

双曲線の方程式を変形して　$(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})(\frac{x}{a}-\frac{y}{b})=1$　とすると

Ｐは媒介変数　s　で　$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=s$，$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{1}{s}$　と表される。

漸近線に平行な直線の方程式は　$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=k$（定数）で漸近線　$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$　との

交点Q，Rは　$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=s$　から　$\mathrm{Q}(\frac{as}{2},\frac{bs}{2})$

同様にして　$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0,\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{1}{s}$　から　$\mathrm{R}(\frac{a}{2s},-\frac{b}{2s})$

従って　$OQ=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}s,\quad OR=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2s}$　で

$$S=OR・OQ\sin QOR=\frac{a^2+b^2}{4}\sin\alpha=\frac{1}{2}ab$$

注）本解法は某先生にご教示いただいたもの。

【解答8】　ポイント：ベクトルの成分表示による。

$\mathrm{P}(p,q)$　　$\vec{u}=(a,b)$，$\vec{v}=(a,-b)$ とおく。

$(p,q)=h\vec{u}+k\vec{v}=h(a,b)+k(a,-b)=(ha+ka,hb-kb)$ から

$h+k=\frac{p}{a},\quad h-k=\frac{q}{b}$　これを解いて $h=\frac{p}{2a}+\frac{q}{2b}$、　$k=\frac{p}{2a}-\frac{q}{2b}$

$\mathrm{S}=|ha(-kb)-hb(ka)|=2|abhk|$

$$hk=\left|\frac{p^2}{4a^2}-\frac{q^2}{4b^2}\right|=\frac{|b^2p^2-a^2q^2|}{4a^2b^2}=\frac{1}{4}\qquad \text{よって}\quad S=\frac{1}{2}ab$$

【解答９】　ポイント：点Q，Rを求めてベクトル成分表示する。

以下、**OQ**, **OR** はベクトルを表します。

$$\mathbf{OQ}=(\frac{aq+bp}{2b},\frac{aq+bp}{2a})\qquad \mathbf{OQ}^2=\frac{a^2+b^2}{4a^2b^2}(aq+bp)^2$$

$$\mathbf{OR}=(-\frac{aq-bp}{2b},\frac{aq-bp}{2a})\qquad \mathbf{OR}^2=\frac{a^2+b^2}{4a^2b^2}(aq-bp)^2$$

$$\mathrm{OQ} \cdot \mathrm{OR} = -\frac{a^2q^2 - b^2p^2}{4b^2} + \frac{a^2q^2 - b^2p^2}{4a^2} = \frac{a^2 - b^2}{4}$$

$S^2 = \left|OQ\right|^2 \cdot \left|OR\right|^2 - \left(OQ \cdot OR\right)^2$　から

$$S^2 = \frac{(a^2 + b^2)^2(a^2q^2 - b^2p^2)^2}{16a^4b^4} - \frac{(a^2 - b^2)^2}{16} = \frac{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2}{16}$$

$= \dfrac{a^2b^2}{4}$　　　従って　$S = \dfrac{1}{2}ab$

以　上