自然数のべき和に関するメモ III

周辺のお話・おまけの文献集 (増補版)

ver-1.2

はじめに

この文章は,「自然数のべき和に関するメモ I, II」に続き, いくつかの文献を参考にして, というよりも今回は文献紹介そのものだけれども, 自然数のべき和の周辺の話題について記した単なるメモです. 新しい事柄は含まれていませんので悪しからず. 今回, おまけの文献集を増補しておきました. 興味のある方はせいぜいご利用ください.

自然数のべき和公式の拡張

その１. 等差数列をなす場合

これまで見てきた様々なべき和公式の導出法に関する記述はひとまず置いておくことにします. 勿論あれらの他にも興味深い方法があるのですが, それらを記述するのがだんだん面倒になってきたのでやめておくことにします. ここでは, はじめにある種の拡張を見ていくことにします. その第一は等差数列をなすようなもののべき和を考えることです. すなわち

$$S_{k,n}(a,d) = a^k + (a+d)^k + (a+2d)^k + \cdots + (a+(n-1)d)^k$$

としたときの $S_{k,n}(a,d)$ に関する公式を見ていきます. ここでの基本的な関係は

$$(a+nd)^{k+1} = a^{k+1} + \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} d^{k+1-j} S_{j,n}(a,d)$$

なる公式で, その証明は例えば Howard [40] に見られます. ちなみにここで $a = d = 1$ とすれば既によく知られた公式

$$(1+n)^{k+1} = 1 + \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} S_j(n)$$

となります.

さて, そこでいきなりですが例えば次のような行列 P, Q を考えてやります. 本来は次数は一般的に考えられるのが良いのでしょうがなにせ書くのが大変ですし, 実際に計算するのも難しいのでここは現実的なところにしておきます.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^2 & d^2 & 2d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^3 & d^3 & 3d^2 & 3d & 0 & 0 & 0 \\ a^4 & d^4 & 4d^3 & 6d^2 & 4d & 0 & 0 \\ a^5 & d^5 & 5d^4 & 10d^3 & 10d^2 & 5d & 0 \\ a^6 & d^6 & 6d^5 & 15d^4 & 20d^3 & 15d^2 & 6d \end{bmatrix}$$

$$
Q = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a^2 & 2ad & d^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a^3 & 3a^2d & 3ad^2 & d^3 & 0 & 0 & 0 \\
a^4 & 4a^3d & 6a^2d^2 & 4ad^3 & d^4 & 0 & 0 \\
a^5 & 5a^4d & 10a^3d^2 & 10a^2d^3 & 5ad^4 & d^5 & 0 \\
a^6 & 6a^5d & 15a^4d^2 & 20a^3d^3 & 15a^2d^4 & 6ad^5 & d^6
\end{bmatrix}.
$$

このとき

$$
\begin{bmatrix}
1 \\
S_{0,n}(a,d) \\
S_{1,n}(a,d) \\
S_{2,n}(a,d) \\
S_{3,n}(a,d) \\
S_{4,n}(a,d) \\
S_{5,n}(a,d)
\end{bmatrix}
= P^{-1}Q
\begin{bmatrix}
1 \\ n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a - \frac{d}{2} & \frac{d}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a^2 - ad + \frac{d^2}{6} & ad - \frac{d^2}{2} & \frac{d^2}{3} & 0 & 0 & 0 \\
0 & a^3 - \frac{3a^2d}{2} + \frac{ad^2}{2} & \frac{3a^2d}{2} - \frac{3ad^2}{2} + \frac{d^3}{4} & ad^2 - \frac{d^3}{2} & \frac{d^3}{4} & 0 & 0 \\
0 & a^4 - 2a^3d + a^2d^2 - \frac{d^4}{30} & 2a^3d - 3a^2d^2 + ad^3 & 2a^2d^2 - 2ad^3 + \frac{d^4}{3} & ad^3 - \frac{d^4}{2} & \frac{d^4}{5} & 0 \\
0 & a^5 - \frac{5a^4d}{2} + \frac{5a^3d^2}{3} - \frac{ad^4}{6} & \frac{5a^4d}{2} - 5a^3d^2 + \frac{5a^2d^3}{2} - \frac{d^5}{12} & \frac{10a^3d^2}{3} - 5a^2d^3 + \frac{5ad^4}{3} & \frac{5a^2d^3}{2} - \frac{5ad^4}{2} + \frac{5d^5}{12} & ad^4 - \frac{d^5}{2} & \frac{d^5}{6}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
1 \\ n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6
\end{bmatrix}.
$$

となることが容易にわかるでしょう．これは単に先の公式で左辺を二項展開したものと右辺を展開

したものを行列で書き表して計算したものに過ぎません. 勿論その逆行列の計算には Mathematica などのソフトウェアは不可欠ですけれどもそれらを使えばこの程度の計算はたちまち出来てしまいます.

次に II で出てきた EOB アルゴリズムを考えてみましょう.

$$S_{k,n}(a,d) = A_{k+1}^k n^{k+1} + A_k^k n^k + \cdots + A_2^k n^2 + A_1^k n$$

と置き直しておきます. このとき係数 A_i^{k+1} たちを $S_{k,n}(a,d)$ の係数たちから求めるのでした. これも既に出来ている結果をほんの少しだけ拡張して当てはめるだけですから造作のないことで, Owens [58] の議論をそのまま使えば

$$d \cdot k \cdot S_{k-1,n}(a,d) = S'_{k,n}(a,d) - S'_{k,0}(a,d)$$

(ここで $S'_{k,n}(a,d)$ は $S_{k,n}(a,d)$ の導関数) が得られます. そうすると

$$\sum_{j=1}^{k} d \cdot k \cdot A_j^{k-1} n^j = \sum_{j=1}^{k} (j+1) A_{j+1}^k n^j$$

$$A_{j+1}^k = \frac{d \cdot k}{j+1} A_j^{k-1} \qquad for\ j = 1, 2, 3, \ldots, k.$$

という関係が得られて, 結局

$$\begin{bmatrix} A_{k+2}^{k+1} \\ A_{k+1}^{k+1} \\ A_k^{k+1} \\ A_{k-1}^{k+1} \\ \vdots \\ A_3^{k+1} \\ A_2^{k+1} \\ A_1^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{k+1}^k & & & & & & & \\ 0 & A_k^k & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & A_{k-1}^k & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & A_{k-2}^k & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & A_2^k & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_1^k & \\ -A_{k+1}^k & -A_k^k & -A_{k-1}^k & -A_{k-2}^k & \cdots & -A_2^k & -A_1^k & a^{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{k+1}{k+2} d \\ d \\ \frac{k+1}{k} d \\ \frac{k+1}{k-1} d \\ \vdots \\ \frac{k+1}{3} d \\ \frac{k+1}{2} d \\ 1 \end{bmatrix}$$

ということになります.

例 $k = 4$ のとき

$$A_5^4 = \frac{d^4}{5}$$

$$A_4^4 = ad^3 - \frac{d^4}{2}$$

$$A_3^4 = 2a^2d^2 - 2ad^3 + \frac{d^4}{3}$$

$$A_2^4 = 2a^3d - 3a^2d^2 + ad^3$$

$$A_1^4 = a^4 - 2a^3d + a^2d^2 - \frac{d^4}{30}.$$

よって

$$\begin{bmatrix} A_6^5 \\ A_5^5 \\ A_4^5 \\ A_3^5 \\ A_2^5 \\ A_1^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_5^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_4^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_1^4 & 0 \\ -A_5^4 & -A_4^4 & -A_3^4 & -A_2^4 & -A_1^4 & a^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{6}d \\ d \\ \frac{5}{4}d \\ \frac{5}{3}d \\ \frac{5}{2}d \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d^5}{6} \\ ad^4 - \frac{d^5}{2} \\ \frac{5}{2}a^2d^3 - \frac{5}{2}ad^4 + \frac{5}{12}d^5 \\ \frac{10}{3}a^3d^2 - 5a^2d^3 + \frac{5}{3}ad^4 \\ \frac{5}{2}a^4d - 5a^3d^2 + \frac{5}{2}a^2d^3 - \frac{1}{12}d^5 \\ a^5 - \frac{5}{2}a^4d + \frac{5}{3}a^3d^2 - \frac{1}{6}ad^4 \end{bmatrix}.$$

という感じです.

次に Kalman [45] による方法を紹介しておきましょう. これの理屈は少し長くなるので結果のみになります. それは

$$S_{k,n}(a,d) = [\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{k+1}] \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \pm 1 & \mp\binom{k}{1} & \pm\binom{k}{2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^k \\ (a+d)^k \\ (a+2d)^k \\ \vdots \\ (a+kd)^k \end{bmatrix}$$

というものです. 例を計算してみましょう.

例 $k=2$ のとき

$$\begin{aligned} S_{2,n}(a,d) &= [\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}] \begin{bmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2 \\ (a+d)^2 \\ (a+2d)^2 \end{bmatrix} \\ &= a^2\binom{n}{1} + (2ad+d^2)\binom{n}{2} + 2d^2\binom{n}{3} \\ &= \frac{d^2}{3}n^3 + (ad - \frac{d^2}{2})n^2 + (a^2 - ad + \frac{d^2}{6})n \end{aligned}$$

ご覧の通り, 次数が小さい場合には手計算でも十分です. 実はこの公式は元の論文にある本来のものを少し限定して使っています. もっと一般的なものにも使えるので興味ある場合には直接それを参照してください.

さらに今度は母関数を用いる方法を紹介しましょう. これは Fay & Sastry [26] に依ります. 基本的な事実として $\{a_n\}$ の母関数 $A(x)$ というのは形式的べき級数で表されて

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

なるものですが, このとき左辺を $1-x$ で除したものが $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ の母関数になります. つまり

$$\frac{A(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

とするときに $b_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ です．さて，ここではこのことを頭に入れておいて

$$\frac{1}{1-x^d} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{nd}$$

というものが役に立ちます．それでは実際に計算してみましょう．いまの式に x をかけて

$$\frac{x}{1-x^d} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{1+nd}$$

とします．その上で微分します．そうすると次のようになります．

$$\frac{1+(d-1)x^d}{(1-x^d)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(1+nd)x^{nd}$$

これで $1+nd$ の母関数が得られています．その和の母関数を得るためには今度は $1-x^d$ で除してやればよいでしょう．つまり $S_{1,n+1}(1,d)$ の母関数が $\dfrac{1+(d-1)x^d}{(1-x^d)^3}$ として得られたということですね．そこであとは x^{nd} の項を取り出してやればよいのですがそれには一工夫必要で次の関係式を用います．

$$\frac{1}{(1-x^d)^k} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}x^{nd}$$

この関係式の証明は何か適当な書物を参照してください．さて，この関係式によって先の母関数は

$$\frac{1+(d-1)x^d}{(1-x^d)^3} = [1+(d-1)x^d]\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}x^{nd}$$

となるわけです．あとは係数比較で

$$S_{1,n+1}(1,d) = \binom{n+2}{2} + (d-1)\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)(2+nd)}{2}$$

ということになります．ここで付け加えておきますが $a=1$ となっていることは議論の簡素化をはかるためであって本質的なものが失われていないことに留意しましょう．

はてさて今度は

$$\frac{1+(d-1)x^d}{(1-x^d)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(1+nd)x^{nd}$$

から出発します．これを微分して $\cdots$ $1-x^d$ で除して $\cdots$ とやっていくと今度は $S_{2,n+1}(1,d)$ の公式が求まるのですが，くどい説明は賢明な読者には不要ですので[1]ここでは少し違った見方をしていくことにします．それは，実際のところ

$$\sum_{j=0}^{n}(1+jd)^k = \sum_{i=0}^{k}A_i^{(k)}\binom{n+k-i-1}{k+1}$$

と書くことが出来るということです．先の

$$S_{1,n+1}(1,d) = \binom{n+2}{2} + (d-1)\binom{n+1}{2}$$

[1]読者におしつけてサボるな !!

もその一つでした．そこで考えることは一つ！ 直接に $A_i^{(k)}$ を求めるにはどうするかということです．ところがこれは簡単で次のようにします．

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x\frac{1}{1-x^d} &= \frac{1+(d-1)x^d}{(1-x^d)^2} = \frac{A_0^{(1)}+A_1^{(1)}x^d}{(1-x^d)^2}, \\
\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}x\frac{1}{1-x^d} &= \frac{1+(d^2+2d-2)x^d+(d^2-2d+1)x^{2d}}{(1-x^d)^3} \\
&= \frac{A_0^{(2)}+A_1^{(2)}x^d+A_2^{(2)}x^{2d}}{(1-x^d)^3}, \\
\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}x\frac{1}{1-x^d} &= \frac{1+(d^3+3d^2+3d-3)x^d+(4d^3-6d+3)x^{2d}+(d-1)^3x^{3d}}{(1-x^d)^4} \\
&= \frac{A_0^{(3)}+A_1^{(3)}x^d+A_2^{(3)}x^{2d}+A_3^{(3)}x^{3d}}{(1-x^d)^4}, \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}
$$

見ておわかりと思いますが, 次々に $A_i^{(k)}$ が k 次導関数の x^{id} の係数として得られています．勿論のこと導関数の計算は Mathematica でも使ってください．

ついでのついでに $A_i^{(k)}$ はある種の recursion relation を満たします．ここでは話題がそれすぎるので省略しますが, $A_i^{(k)}$ が Eulerian numbers の拡張になっていることから従うものです．そのように考えると $A_i^{(k)}$ は, Worpitzky の公式のある種の拡張の係数として存在していると見ることもできましよう[2]．

その２． Fibonacci 数列をなす場合

Fibonacci 数列については数多の考察があって, ここで特筆するべきものは何もない筈なのですが, 一応は乗りかかった船というノリで少し記述することにします．よく知られた事実としては Fibonacci 数列 $\{F_n\}$ について

$$\sum_{j=1}^{n} F_j = F_n + F_{n+1} - 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} F_j^2 = F_n F_{n+1}$$

が成り立つということです．Monk ,Tang & Brown [54] に従って拡張された Fibonacci 数列,

$$f(k,n) = kf(k,n-1) + f(k,n-2),\ f(k,0)=0,\ f(k,1)=1$$

これを k-Fibonacci 数列と呼ぶことにして, 簡単のために $\{w_n\}$ で表して, これに対してべき和を計算すると

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = \frac{w_n + w_{n+1} - 1}{k}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j^2 = \frac{w_n w_{n+1}}{k}$$

---

[2] ちょっとこれは言い過ぎ !?

という関係式が成り立ちます. 勿論さらに次数をあげることも可能のようですが, 計算がいくらか大変です. まずは準備として

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}w_j = \frac{(-1)^{n+1}w_{n+1} + (-1)^n w_n + 1}{k}$$

となることを確認してから計算すると

$$\sum_{j=1}^{n} w_j^3 = \frac{w_{n+1}^3 + w_n^3 + 3(-1)^{n+1}w_{n+1} + 3(-1)^n w_n + 2}{k(k^2+3)}$$

という感じになります. この式は見た感じではもう少しなんとかなりそうなのですが今のところこれ以上の変形が出来ません. ついでに

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}w_j^2 = \frac{(-1)^{n+1}w_{n+1}^2 - (-1)^n w_n^2 + 2n + 1}{k^2+4}$$

となる筈で, これを使うと 4 乗の式が得られる筈ですが, 私的計算の結果はあまり綺麗にならなかったので, ここでは途中までの計算結果までにします. だいたいにして

$$\sum_{j=1}^{n} w_j^4 = \frac{1}{k^2(k^2+4)^2}\{(k^2+4)(w_{n+1}^4 - w_n^4) + 4(-1)^{n+1}(k^2+1)(w_{n+1}^2 - w_n^2) + 3k^2(2n+1)\}$$

というところからの変形がわからない !!

立方和と和の平方をめぐって

自然数のべき和を簡単のために $S_1,\ S_2,\ S_3, \ldots$ のように書き表すとき, あまりにも有名な関係式, これは [77] に依ると Nicomachus's Theorem と呼ぶらしい

$$S_1^2 = S_3$$

に関する記述も多くの文献に見られます. 一般的には

$$\Bigl(\sum_{x=1}^{n} x^r\Bigr)^p = \Bigl(\sum_{x=1}^{n} x^s\Bigr)^q$$

という関係式は $r=1,\ p=2,\ s=3, q=1$ の時のみ成り立つようです Allison [2]. これの拡張された関係式？というよりもその関係を含むような一般的な関係式が存在しますが, その一つは以下のようなものです Cavior [12].

$$\Bigl\{\sum_{x=1}^{n}(x+a)\Bigr\}^2 = \sum_{x=1}^{n}(x^3 + 3ax^2 + (2a^2-a)x - a^2)$$

ここで a は任意の実定数. ここで $a=0$ のときが $S_1^2 = S_3$ に他なりません.

続いて

$$\Bigl\{\sum_{x=1}^{n} f(x)\Bigr\}^p = \Bigl\{\sum_{x=1}^{n} g(x)\Bigr\}^q, \quad p \neq q$$

を満たすような monic でない多項式を見つけようとするのなら,

$$\sum f(t) = n^t$$

を満たすようなものを見つけていけば良いことになります．その一例は

$$\Big\{\sum_{x=1}^{n}(4x^3-6x^2+4x-1)\Big\}^3=\Big\{\sum_{x=1}^{n}(3x^2-3x+1)\Big\}^4$$

です．しかしこうなると

$$(4S_3-6S_2+4S_1-S_0)^3=(3S_2-3S_1+S_0)^4$$

の形ですから元の関係式の簡潔な美しさは薄れているような気がします．さておき, 拡張の仕方はまだあって, それが

$$-2S_{2m+1}=\sum_{k=1}^{2m-1}\binom{2m}{k}(-1)^kS_kS_{2m-k}$$

というものです．これは Szabó [70] によるものです．そのはじめのいくつかを羅列すると

$$\begin{aligned}
&S_3=S_1^2\\
&S_5=4S_1S_3-3S_2^2\\
&S_7=6S_1S_5-15S_2S_4+10S_3^2\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

という具合です．証明は短いのですぐに読めます．そして, 拡張の形はまだまだ他にもあって

$$T_k=(1+2+\cdots+n)^k$$

と置くとき,

$$T_k=\frac{1}{2^{k-1}}\sum_{i=1}^{[\frac{k+1}{2}]}\binom{k}{2i-1}S_{2k+1-2i}$$

が成り立つことが知られています．怠慢のせいで適当な証明のついた文献が見あたらないのですが, まあその結果をいくつか書けば

$$\begin{aligned}
&T_1=S_1\\
&T_2=S_3\\
&T_3=\frac{1}{4}S_3+\frac{3}{4}S_5\\
&T_4=\frac{1}{2}S_5+\frac{1}{2}S_7\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

となっているということです．この関係式のさらなる拡張を次に紹介するので証明はそちらを参照してもよいでしょう．

さて, Melham [53] に従って, 数列 $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ を次のように定義しておきます．

$$\begin{cases}U_n=pU_{n-1}-U_{n-2}, & U_0=0,\ U_1=1,\\ V_n=pV_{n-1}-V_{n-2}, & V_0=2,\ V_1=p,\end{cases}$$

ここで $p \geq 2$ は整数としておきます．このとき以下の関係式が成り立ちます．

$$
\begin{aligned}
(p+1)\sum_{k=1}^{n} U_k^3 &= (p-2)(\sum_{k=1}^{n} U_k)^3 + 3(\sum_{k=1}^{n} U_k)^2, \\
(p+1)(p^2+p-1)\sum_{k=1}^{n} U_k^5 &= (p+1)(p-2)^2(\sum_{k=1}^{n} U_k)^5 \\
&\quad + 5(p+1)(p-2)(\sum_{k=1}^{n} U_k)^4 \\
&\quad + 5(p+2)(\sum_{k=1}^{n} U_k)^3 \\
&\quad - 5(\sum_{k=1}^{n} U_k)^2, \\
(p+1)(p^2+p-1)(p^3+p^2-2p-1)\sum_{k=1}^{n} U_k^7 &= (p+1)(p-2)^3(p^2+p-1)(\sum_{k=1}^{n} U_k)^7 \\
&\quad + 7(p+1)(p-2)^2(p^2+p-1)(\sum_{k=1}^{n} U_k)^6 \\
&\quad + 7(p+1)(2p-1)(p^2-4)(\sum_{k=1}^{n} U_k)^5 \\
&\quad + 35p(p+1)(\sum_{k=1}^{n} U_k)^4 \\
&\quad - 7(p+2)(2p+1)(\sum_{k=1}^{n} U_k)^3 \\
&\quad + 7(2p+1)(\sum_{k=1}^{n} U_k)^2
\end{aligned}
$$

ご覧の通り, V_n は使っていませんが導出の途中の議論で必要です．これらの一般的な形はよくわかりませんが, これらを導出する過程, すなわちアルゴリズムが与えられているので, このあとの関係式を得るのは腕力の問題と言えるでしょう．

さてさて, 上記の関係式で $p = 2$ としてみてください．U_n はこのとき通常の自然数の列を表し, それぞれ

$$
\begin{aligned}
S_3 &= T_2 \\
S_5 &= \frac{4}{3}T_3 - \frac{1}{3}T_2 \\
S_7 &= 2T_4 - \frac{4}{3}T_3 + \frac{1}{3}T_2
\end{aligned}
$$

を得ます．これらは先の式を変形したものに過ぎません．さらに言うと, U_n, V_n は Chebyshev 多項式の特殊な場合なので Grabner & Prodinger [31], もしかしたらもう少し一般的な議論が可能なのかも知れませんが, このあたりはよく知りません．

加法公式

最後にもう一つの話題ということで加法公式について触れておきましょう．実際には使い道があるようには思えないのと、計算した加法公式に間違いがないか怪しい？のですが、失敗を恐れずに

書くことにしましょう．ここでは雑誌「BASIC 数学」別冊,「朝の間の大学数学」の土川先生の記事「特殊関数」(p203-208) を基に書くことにします．興味のある読者はそちらを直接ご覧下さい．

さて, 難しい前置きはやめておくことにしてここでは関数 $f(x)$ の加法公式を

$$f(x+y) = A(y)f(x)$$

の形に表すことを考えます．ここで $A(x)$ は

$$A(t_1+t_2) = A(t_1) + A(t_2), \quad A(0) = E$$

を満たすような行列とします．このとき一見して明らかなように[3]このような行列は行列の指数関数

$$A(t) = \exp tB = E + tB + \frac{1}{2!}(tB)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(tB)^n + \cdots$$

であることがわかります．そこで行列 B をいくつか与えて加法公式を実際にみていくことにします．お話の流れとしては B から $A(t)$ を求め, 次に $f(0)$ から $f(x) = A(t)f(0)$ を得, 最後に $f(x+y) = A(y)f(x)$ にたどりつくということです．

その１．　１次の正方行列として $B = 1$ とします．このとき明らかに $A(t) = e^t$ で, $f(0) = 1$ とおくとこれは $f(x) = e^x$ で, 加法公式

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

を得ます．

その２．　２次の正方行列 $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ に対して

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} -t^2 & 0 \\ 0 & -t^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{bmatrix} 0 & t^3 \\ -t^3 & 0 \end{bmatrix} + \cdots$$

これと sin, cos のよく知られた関係から

$$A(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

であることがわかります．ここで $f(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ とおくと,

$$f(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x \\ \sin x \end{bmatrix}.$$

したがって加法公式は

$$\begin{bmatrix} \cos(x+y) \\ \sin(x+y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos x \\ \sin x \end{bmatrix}$$

で与えられます．

その３．　２次の正方行列 $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ に対して

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{bmatrix} 0 & t^3 \\ t^3 & 0 \end{bmatrix} + \cdots$$

[3]ほんまかいな？

これと sinh, cosh のよく知られた関係から

$$A(t) = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}$$

であることがわかります. ここで $f(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ とおくと,

$$f(x) = \begin{bmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh x \\ \sinh x \end{bmatrix}.$$

したがって加法公式は

$$\begin{bmatrix} \cosh(x+y) \\ \sinh(x+y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh y & \sinh y \\ \sinh y & \cosh y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh x \\ \sinh x \end{bmatrix}$$

で与えられます.

その４. n 次の正方行列 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$ に対して

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ t & 1 & 0 & & & \vdots \\ \frac{1}{2!}t^2 & t & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \frac{1}{n!}t^n & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} & & & t & 1 \end{bmatrix}.$$

ここで $f(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ とおくと, $f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \frac{1}{2!}x^2 \\ \vdots \\ \frac{1}{n!}x^n \end{bmatrix}$ となり, 加法公式は二項定理を与えます.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x+y \\ \frac{1}{2!}(x+y)^2 \\ \vdots \\ \frac{1}{n!}(x+y)^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ y & 1 & 0 & & & \vdots \\ \frac{1}{2!}y^2 & y & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \frac{1}{n!}y^n & \frac{1}{(n-1)!}y^{n-1} & & & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \frac{1}{2!}x^2 \\ \vdots \\ \frac{1}{n!}x^n \end{bmatrix}.$$

さて, ここまでくると行列の指数関数の求め方が一筋縄ではいかないのが普通ですが, 幸い Mathematica には MatrixExp という組み込み関数があるのでそういうものを利用するのが得策かも知れません. そてそれでやっとこさべき和公式の加法公式を考えることになりますがそれには以下のようにします.

その５．　はじめに５次の正方行列 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ に対して

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_0(t) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ S_1(t) & t & 1 & 0 & 0 \\ S_2(t) & t^2 & 2t & 1 & 0 \\ S_3(t) & t^3 & 3t^2 & 3t & 1 \end{bmatrix}.$$

この計算は Mathematica でどうぞ！

ここで $f(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とおくと, $f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ S_0(x) \\ S_1(x) \\ S_2(x) \\ S_3(x) \end{bmatrix}$ となり, ３乗までのべき和の加法公式を与えます.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ S_0(x+y) \\ S_1(x+y) \\ S_2(x+y) \\ S_3(x+y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_0(y) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ S_1(y) & y & 1 & 0 & 0 \\ S_2(y) & y^2 & 2y & 1 & 0 \\ S_3(y) & y^3 & 3y^2 & 3y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ S_0(x) \\ S_1(x) \\ S_2(x) \\ S_3(x) \end{bmatrix}.$$

そこで, これを一般化すれば良いのですが, それには B を与えることよりも直接 $A(t)$ を類推したほうが早くて, 結局以下のようになります. 実はこの関係式の証明は直接的にできるのですが, ここでははじめにお断りしたように, 少し表現論的な統一感を出すためにあえて回りくどい議論をしたのでした. つまり, $t \to A(t)$ が $\mathbb{R}$ の表現であって, その無限小変換 $B = A'(0)$ から $A(t)$ が $\exp tB$ によって求められ, このとき $f(x) = A(t)f(0)$ で $f(x)$ を求めれば, 目的の加法公式が得られるというわけでした.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ S_0(x+y) \\ S_1(x+y) \\ S_2(x+y) \\ S_3(x+y) \\ S_4(x+y) \\ \vdots \\ S_{k-2}(x+y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ S_0(y) & 1 & & & & \text{\huge 0} & \\ S_1(y) & y & 1 & & & & \\ S_2(y) & y^2 & 2y & 1 & & & \\ S_3(y) & y^3 & 3y^2 & 3y & 1 & & \\ S_4(y) & y^4 & 4y^3 & 6y^2 & 4y & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ S_{k-2}(y) & y^{k-2} & \binom{k-2}{1}y^{k-3} & \binom{k-2}{2}y^{k-4} & \cdots & & \binom{k-2}{k-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ S_0(x) \\ S_1(x) \\ S_2(x) \\ S_3(x) \\ S_4(x) \\ \vdots \\ S_{k-2}(x) \end{bmatrix}.$$

書き残したその他雑多なこと

その１．　べき和公式に関わる大切な数たち

これまで見てきたべき和公式に関してその結果あるいは導出の過程で大切な数がたくさん出てきました. 羅列しても スターリング数, ベルヌーイ数, Central Factorial Numbers, は既に登場済

みです．この他にも Eulerian Numbers は重要でこれを用いた Worpitzky の公式は特に大切です．これは

$$\begin{aligned}
x^2 &= \binom{x}{2} + \binom{x+1}{2} \\
x^3 &= \binom{x}{3} + 4\binom{x+1}{3} + \binom{x+2}{3} \\
x^4 &= \binom{x}{4} + 11\binom{x+1}{4}x^2 + 11\binom{x+2}{4} + \binom{x+3}{4} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

という関係式を一般的に

$$x^n = \sum_k \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{x+k}{n}$$

と表したものですが，ここで出てきた $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ というのが Eulerian Numbers なのです．日本語に訳すと オイラー数と混同しやすいので注意が必要です．あらためて言うまでもなく Worpitzky の公式と，組合せ論での基本的な関係式

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

を用いれば，べき和が簡単に求められることがわかるでしょう．

さて，Eulerian Numbers は対称群 $\mathfrak{S}_n$ の元 π で k 個の上昇を持つものの個数としても定義されていて，このあたりの議論からさらに深めれば permutation statistics の分野の深く広い研究の成果から何かが得られるかも知れません．

その２． べき和公式に関わる歴史的な事柄というより現在

やはり Edwards [21] に依るのが一番だとは思うけれども，それによると事のはじまりは 17 世紀にまで遡るようで，Fermat, Pascal, Faulhaber などの人物が多大な貢献をしたようです．特に Faulhaber の著 Academia Algebræ(1631) には，べき和公式に関する多くの記述が見られるようですがここで書くよりも Knuth [47] のはじめの部分を読んでいただくほうが良いでしょう．その後はやはり Bernoulli, Jacobi, Euler などの碩学がここでも貢献して $\cdots$ という具合で，最近ではどうなっているかというと，結局これまで紹介したような成果になっているのでしょうが，これらは当然の事ながら現在では数学研究の最先端というのでは無くて recreational math の性格になっているようです．そしてそれらの話題あるいは周辺の話題が提供されるのは現在では主に次の３誌であると思います[4]．”Mathematics Magazine” The Mathematical Association of America, ”The Mathematical Gazette” The Mathematical Association, ”The Fibonacci Quarterly” The Fibonacci Association, もちろんこの他にも”The College Mathematics Journal” であるとか ”American Mathematical Monthly” であるとか ”Mathematics and Computer Education Journal” にも記事をたまに見つけることが出来ます．または全くこれら以外の雑誌であることも皆無では無いのですが，やはりなんとなくレフェリーの興味・趣味も含めての受け入れ状況がはっきりしているような気がします．そのあたりは実際に付録の参考文献を見ていただくと良いと思います．

さて，その累々とした歴史的探求のモチベーチョンについては浅学ゆえ何も知りません．おそらくは何かの役に立つモノであろうとは思うのですが，まあ数学の世界では実用性は度外視して $\cdots$

[4]勿論個人的な思いこみ

なんてことはありますがこれほどの初等的題材がこれほどの歴史を持って探究されているには何らかの理由が存在すると思うのです. 勝手に読者への宿題にしておきます.

あとがき

メモ II をあげてからしばらく嫌気がさしてほっておいたのですが, 既に半年が経とうとして, 結局やめるのも書くのも最後の決断の時期かなと考え, 今回は本当に最後のつもりで周辺の話題を書きました[5]. 予告通り, 趣味的な内容になってしまったのは明らかです. そもそも, 周辺の話題の選択が趣味的. 特に加法公式のあたりはわざわざ回りくどい議論になっていますし少し書き方が足らないかも知れません. 参考文献は周辺の話題の分を入れたので少し増えたものになりました. 文中でも書いたようにこの手の話題は限られた雑誌が出典となるので, 興味のある方は直接あたられるのが良いかと思います. ちなみにそのような, 海の向こうでは大学初年級あたりの教材にもなりそうな話題を提供してくれる雑誌の一覧は Google で検索するか, 直接次のところにアクセスしてみると良いでしょう. http://directory.google.com/Top/Science/Math/Education/Magazines/ そして興味のある雑誌の所在は国立国会図書館か Webcat で調べてから適当な手続きを経て複写を手に入れると良いでしょう. さらに結果として面白いものがまとまれば, 逆にそのような雑誌に投稿してみるとか ⋯ . あるいは科研費でも申請するとか ⋯ [6].

さて, 最近では教育現場を離れての研修がとりにくくなっているところもあるようですが, そのような時こそ大いにムダな話題に首をつっこんでいこうと思います. そういえば最近はどこかでも数学におけるアマチュアリズムを奨励するような団体が設立されたように何かの記事で見かけたけれど, ようやく研究でもなく教育でもない趣味の世界が認知されるようになるのであれば嬉しいことですね.

少し直感的なとこからはじめてこれまでの成果の知る限りのところのうちのいくつかを, かいつまんで紹介したわけですが, 通して気を付けていた Concrete Math の世界の話にまとめることが出来たかどうか自信がありません. 特に III は結果の紹介のみに終わってしまいました. [30] に感動してこんな駄文を書く気にもなったのですが, やはり素人には難しいものであることを実感した次第です.

最後に I, II, III に渡りお読みいただけたご奇特な方にはあらためて感謝申し上げます. とりわけ, 掲載していただいた数実研のみなさまに感謝申し上げる次第です.

2003-08-25 & 2003-11-07, Typeset by LaTeX 2_ε, 京都府立鳥羽高校定時制　稲葉芳成

.... 次頁のおまけの文献集につづく

[5]ほんとうに最後です
[6]奨励研究のことはここを見ましょう. http://www.jsps.go.jp/j-grantsinaid/index.html

自然数のべき和に関するメモ・番外

おまけの文献集・References

ver-1.3

おまけ

以下に, 知る限りで, かつ入手がまあ困難でないであろうと思われる, べき和に関する参考文献をあげておきます. 入手困難なものは省いてあるということと, コツコツと調べて寄せ集めたものなのですべてを網羅しているわけでは無いことに留意いただきたい. またその逆に周辺の話題に関することで直接的でないものが含まれていることにもはじめにお断りをしておきます. II に付録したものより 30 程増えたのはそのせいでもあります. また, 書籍関係は実にたくさんの中のほんの一部しかとりあげていません. 悪しからず[7].

参考文献

[1] D.Acu, Some algorithm for the sums of integer powers, Mathematics Magazine,61(1988),189-191

[2] D.Allison, A note on sums of powers of integers, American Mathematical Monthly, 68(1961), 272

[3] I.Anderson, Sums of squares and binomial coefficients, Mathematical Gazette,65(1981),87-92

[4] O.D.Anderson, Explicit formula for summing $1^k+2^k+\cdots+n^k$, Mathematics and Computer Education,24(1990),225-231

[5] O.D.Anderson, Summing powers of integers, Mathematical Spectrum,23(1990/1991),116-121

[6] A.B.Ayoub, A note on the sums of squares of natural numbers, Mathematics and Computer Education,26(1992),246-247

[7] A.F.Beardon, Sums of powers of integers, American Mathematical Monthly 103(1996),201-213

[8] D.M.Bloom, An old algorithm for the sum of integer powers, Mathematics Magazine, 66(1993),304-305

[9] C.B.Boyer, Pascal's formula for the sums of powers of the integers, Scripta Math,9(1943),237-244

[10] G.F.C.de Bruyn and J.M.de Villiers, Formulas for $1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p$, Fibonacci Quarterly, 32.3(1994), 271-276

[11] B.L.Burrows and R.F.Talbot, Sums of powers of integers, American Mathematical Monthly 91(1984),394-403

[12] S.R.Cavior, A theorem on power sums, Fibonacci Quarterly, 6.2(1968), 157-161

[7] 資料が間違っていたらゴメンナサイ !!

[13] F.Chorlton, Finite sums of powers of the natural numbers, Mathematical Gazette, 82(1998), 95-96

[14] J.H.Conway and R.K.Guy, The book of numbers, 1996,Springer-Verlag ISBN0-387-97993-X

[15] A.Cupillari, Proof without words: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots n^3 = \frac{[n(n+1)]^2}{4}$, Mathematics Magazine,62(1989),259

[16] D.Desbrow, Sums of integer powers, Mathematical Gazette,66(1982),97-100

[17] D.Desbrow, Volumetric proof of the sum of squares formula, Mathematical Gazette, 83(1999), 256-257

[18] J.Ding and T.H.Fay, Bernoulli numbers and calculating the sums $1^k + 2^k + \cdots + n^k$, Mathematics and Computer Education,30(1996),70-79

[19] J.Doucet and A.Saleh-Jahromi, Sums of powers of integers, Research paper in Proceedings of the Louisiana-Mississippi Section of the Mathematical Association of America,Spring 2002 (On-Line)
http://www.mc.edu/campus/users/travis/maa/proceedings/spring2002/doucet.jahroni.pdf

[20] S.M.Edmonds, Sums of powers of natural numbers, Mathematical Gazette,41(1957),187-189

[21] A.W.F Edwards, Sums of powers of integers : a little of the history, Mathematical Gazette, 66(1982),22-28

[22] A.W.F Edwards, A quick route to sums of powers, American Mathematical Monthly 93(1986),451-455

[23] T.H.Fay, A note on the sums $1^k + 2^k + \cdots + n^k$, Mathematics and Computer Education, 28(1994),46-47

[24] T.H.Fay, Remarks on the sums of powers of integers, Mathematics and Computer Education, 30(1996),174-178

[25] T.H.Fay and K.R.S.Sastry, A further note on the sums $1^k + 2^k + \cdots + n^k$, Mathematics and Computer Education,29(1995),253-261

[26] T.H.Fay and K.R.S.Sastry, Sums of powers of an arithmetic progression, Mathematical Spectrum,30(1997/1998),10-12

[27] T.H.Fay and B.L.Piazza A combinatorial approach to the calculation of $1^k + 2^k + \cdots + n^k$, Mathematics and Computer Education,29(1995),269-278

[28] I.Gessel, A formula for power sums, American Mathematical Monthly,95(1988),961-962

[29] I.M.Gessel and X.G.Viennot, Determinants, paths, and plane partitions, preprint,(1989)

[30] R.L.Graham, D.E.Knuth and O,Patashnik, Concrete mathematics, 1994, Addison-Wesley, ISBN 0-201-55802-5

[31] J.Grabner and H.Prodinger, Some identities for Chebyshev polynomials, Portugalia Math, 59(2002), 311-314

[32] M.Griffiths, Sums of powers of the terms in any finite arithmetic progression, Mathematical Gazette, 86(2002),269-270

[33] S.-L.Guo and F.Qi, Recursion formulae for $\sum_{m=1}^{n} m^k$, Z.Anal.Anwendungen(J.Anal.Appl), 18(1999).4,1123-1130

[34] S.L.Gupta An identity involving the sum of the kth powers of the first n natural numbers, Mathematical Gazette, 56(1972),128-129

[35] E.Hairer and G.Wanner, Analysis by its history, UTM,1996,Springer-Verlag,ISBN0-387-94551-2

[36] V.E.Hoggatt,Jr, A note on the summation of squares, Fibonacci Quarterly,15.4 (1977) 367-369

[37] V.E.Hoggatt,Jr, Corrections to "A note on the summation of squares", Fibonacci Quarterly,18.1 (1980) 82-83

[38] P.Holmes, Proof without words:$\sum_{r=1}^{n} r^3 = (\sum_{r=1}^{n} r)^2$, Mathematical Gazette,86(2002), 267-268

[39] F.T.Howard, Sums of powers of integers, Mathematical Spectrum,26(1993/1994),103-109

[40] F.T.Howard, Sums of powers of integer via generating functions, Fibonacci Quarterly, 34.3(1996), 244-256

[41] F.T.Howard, Lacunary recurrences for sums of powers of integers, Fibonacci Quarterly, 36.5(1998), 435-442

[42] S.Jafari, Summing the series $\sum_{r=1}^{n} r$ and $\sum_{r=1}^{n} r^2$ using Pascal's identity, Mathematical Spectrum,26(1993/1994),50-51

[43] V.Kac and P.Cheung, Quantum calculus, Universitext,2000,Springer-Verlag

[44] R.A.Kahn, A simple derivation of a Formula for $\sum_{k=1}^{n} k^r$, Fibonacci Quarterly, 19.2 (1981),177-180

[45] D.Kalman, Sums of powers by matrix methods, Fibonacci Quarterly, 28.1(1990),60-71

[46] C.Kelly, An algorithm for sums of integer powers, Mathematics Magazine, 57(1984),296-297

[47] D.E.Knuth, Johann Faulhaber and sums of powers, Mathematics of Computation, 61(1993), 277-294

[48] T.Koshy, Summing integer cubes using Thébault's array of arithmetic sequences, Mathematical Gazette, 86(2002),271-272

[49] K.R.Kundert, Sums of powers as sums of products, Mathematics Magazine, 54(1981),81-83

[50] C.L.Liu, Intoroduction to combinatorial mathematics, 1968,McGraw-Hill,ISBN0-07-038124-0

[51] L.A.Lyusternik and A.R.Yanpol'skii,eds, Mathematical Analysis-Functions, Limits, Series, Continued Fractions, 1965,Pergmon Press

[52] G.Mackiw, A combinatorial approach to sums of integer powers, Mathematics Magazine, 73(2000),44-46

[53] R.S.Melham, On sums of powers of terms in a linear recurrence, Portugalia Math, 56(1999), 501-508

[54] L.Monk, D.Tang and D.Brown, Identities for generalized Fibonacci Numbers, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol, (2003) to appear

[55] W.O.J.Moser, Sums of dth powers, Mathematical Gazette,75(1991),332-334

[56] J.I.Naus, An instructive derivation of sums of powers and factorial powers of integers, Amer. Statist, 20(1966),42-43

[57] J.Nunemacher and R.Young, On the sum of consecutive k-th powers, Mathematics Magazine, 60(1987),237-238

[58] R.W.Owens, Sums of powers of integers, Mathematics Magazine,65(1992),38-40

[59] R.V.Parker, Sums of powers of the integers, Mathematical Gazette,42(1958),91-95

[60] J.L.Paul, On the sum of the kth powers of the first n integers, American Mathematical Monthly 78(1971),271-272

[61] D.E.Penney and C.Pomerance, Multiplicative relations for sums of initial kth powers, American Mathematical Monthly 92(1985),729-731

[62] P.A.Piza, Powers of sums and sums of powers, Mathematics Magazine, 25(1952),137-142

[63] J.Riordan, Generating functions for powers of Fibonacci numbers, Duke Math.J. 29(1962),5-12.

[64] J.Riordan, Introduction to combinatorial analysis ,2002,Dover,ISBN0-486-42536-3(Original printed,1958,John Wiley)

[65] H.J.Schultz, The sums of the k-th powers of the first n integers, American Mathematical Monthly 87(1980),478-481

[66] J.A.Scott, On sums of powers of the natural numbers,Mathematical Gazette, 85(2001),89-90

[67] M.J.A.Sharkey, An identity involving the sums of powers, Mathematical Gazette, 57(1973), 131-133

[68] R.P.Stanley, Enumerative Combinatorics, Vol.1, 1997, CAMBRIDGE ADVANCED VOL.49, ISBN0-521-55309-1

[69] R.P.Stanley, Enumerative Combinatorics, Vol.2, 1999, CAMBRIDGE ADVANCED VOL.62, ISBN0-521-56069-1

[70] L.I.Szabó, Some equations concerning the sums of powers of integers, Acta Sci.Math. (Szeged) 67(2001),501-503

[71] M.Tepper, Combinations and sums of powers, Fibonacci Quarterly, 12.2(1974), 196-198

[72] M.Tepper, Sums of powers, Mathematics Magazine, 38(1965),17-19

[73] B.Turner, Sums of powers of integers via the binomial theorem,Mathematics Magazine, 53(1980),92-96

[74] N.Wermuth, Proof without words: factorising sums of integers taken to a small fixed power,(2002),http://psystat.sowi.uni-mainz.de/wermuth/pdfs/sumint.pdf

[75] J.Wiener, A calculus exercise for the sums of integer powers, Mathematics Magazine, 65(1992), 249-251

[76] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (On-Line)
http://www.research.att.com/ njas/sequences/

[77] Eric W. Weisstein, world of MATHEMATICS (On-Line)
http://mathworld.wolfram.com/

2003-10-15 , Typeset by LaTeX 2_ε, 京都府立鳥羽高校定時制　稲葉芳成