自然数のべき和に関するメモ II

母関数・Central Factorial Numbers・etc・おまけの文献集

ver1.2

はじめに

この文章は,「自然数のべき和に関するメモ I」に続き, いくつかの文献を参考にして, 自然数のべき和について記した単なるメモです. 新しい事柄は含まれていませんので悪しからず. 今回は文末にちょっとした, おまけの文献集をつけておきました. 興味のある方はせいぜいご利用ください.

母関数

ベルヌーイ数によるべき和の表示に関する記述でベルヌーイ数やベルヌーイ多項式についての母関数を書いておきながら, 肝心のべき和自身の母関数を与えるのを忘れてしまっていた.

まず, 収束などの細かい議論は例によって置いておき, 恒等式

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^k + \cdots$$

であることから始めよう. この式を両辺微分して

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots + kx^{k-1} + \cdots$$

したがって

$$\frac{x}{(1-x)^2} = 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots + kx^k + \cdots.$$

これでまず $0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ の母関数が得られます. そこでこれに $\frac{1}{1-x}$ をかけて,

$$\begin{aligned}\frac{x}{(1-x)^3} &= \frac{1}{1-x}(0 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \cdots)\\ &= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)(0 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \cdots)\\ &= 0 + (0+1)x + (0+1+2)x^2 + (0+1+2+3)x^3 + (0+1+2+3+4)x^4 + \cdots.\end{aligned}$$

これで $0,\ 0+1, 0+1+2,\ 0+1+2+3,\ 0+1+2+3+4, \cdots$ の母関数が得られたことになります. したがってあとは x^k の係数を比較すればよい.

負の二項定理によって $\frac{1}{(1-x)^3}$ の x^k の係数が

$$\begin{aligned}&= \frac{-3(-3-1)(-3-2)\cdots(-3-k+1)}{k!}(-1)^k\\ &= \frac{3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times (k+2)}{k!}\\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\end{aligned}$$

であることを考えれば, $\frac{x}{(1-x)^3}$ の x^k の係数は $\frac{k(k+1)}{2}$ となるから

$$\sum_{m=1}^{k} m = \frac{k(k+1)}{2}$$

を得ます. この調子で今度は

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \cdots + kx^k + \cdots$$

をさらに微分して x をかけて

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = 0^2 + x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4 + 5^2x^5 + \cdots + k^2x^k + \cdots.$$

そこで $\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ に $\frac{1}{1-x}$ をかけてやって

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$$

が $0^2,\ 0^2+1^2,\ 0^2+1^2+2^2,\ 0^2+1^2+2^2+3^2,\ 0^2+1^2+2^2+3^2+4^2, \cdots$ の母関数となることからあとは先と同様にして $\frac{1}{(1-x)^4}$ の x^k の係数が

$$\begin{aligned}
&= \frac{-4(-4-1)(-4-2)\cdots(-4-k+1)}{k!}(-1)^k \\
&= \frac{4\times 5\times 6\times\cdots\times(k+3)}{k!} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}
\end{aligned}$$

であることを考えれば $\frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$ の x^k の係数は

$$\frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k-1)k(k+1)}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

したがって

$$\sum_{m=1}^{k} m^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

さて, このまま立方和のところも計算したいところですが, 計算量は結構なもので面倒なのでやめておきます. 一般に

$$\frac{1}{1-x}\{x\frac{d}{dx}(\cdots(x\frac{d}{dx}(x\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}))\cdots)\} = \frac{1}{1-x}(x\frac{d}{dx})^n\frac{1}{1-x}$$

の x^k の係数を考えれば良いということは予想できますが, その計算は簡単ではないでしょう.

階乗関数再び・Central Factorial Numbers

[メモ I] では階乗関数として例えば $(x)_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) \quad n=1,2,3,\cdots$ というものを採用しました. ものの本によると階乗関数は複数あって, 例えば On-Line 上では Eric W. Weisstein, world of MATHEMATICS(http://mathworld.wolfram.com/) などで調べると, くだんのものは falling factorial と呼ばれるもので $\langle x\rangle_n = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) \quad n=1,2,3,\cdots$ というものは rising factorial と呼ばれるようです.

さてそこで $\{x\}_n = (x+n)(x+n-1)(x+n-2)\cdots x(x-1)(x-2)\cdots(x-n) \quad n=0,1,2,\cdots$ なるものがあっても良さそうなのですが探すことができませんでした. ニュアンスでいうとさしずめ centering factorial というところですが, さてどうなのでしょう？積の因数の個数が通常の階乗関数よりは多くなるのでこのような関数は階乗関数の仲間には入れないのかも知れません.

余談はさておき, この階乗関数を「括弧」付きの「階乗関数」で表しておきます. そしてこれを用いてしばらく考察を進めます.

はじめに $x^{2n+1}, \quad n=1,2,3,\cdots$ がこの「階乗関数」で表されることを見ましょう.

$n=0$ のときは自明として $\cdots$.

$$x^{2n+1} = a_0\{x\}_0 + a_1\{x\}_1 + \cdots + a_n\{x\}_n$$

に対して

$$\begin{aligned}
x^{2n+1}\cdot x^2 &= a_0x^2\{x\}_0 + a_1x^2\{x\}_1 + \cdots + a_nx^2\{x\}_n \\
&= a_0(\{x\}_1 + \{x\}_0) + a_1(\{x\}_2 + 4\{x\}_1) + \cdots + a_n(\{x\}_{n+1} + (n+1)^2\{x\}_n)
\end{aligned}$$

ということで x^{2n+3} がまたこの「階乗関数」で表されることがわかるので簡単な induction が成り立ちます.

で, 実際にはじめのいくつかをこの「階乗関数」で表すと

$$\begin{aligned}
x^1 &= \{x\}_0 \\
x^3 &= \{x\}_1 + \{x\}_0 \\
x^5 &= \{x\}_2 + 5\{x\}_1 + \{x\}_0 \\
x^7 &= \{x\}_3 + 14\{x\}_2 + 21\{x\}_1 + \{x\}_0 \\
x^9 &= \{x\}_4 + 30\{x\}_3 + 147\{x\}_2 + 85\{x\}_1 + \{x\}_0 \\
x^{11} &= \{x\}_5 + 55\{x\}_4 + 627\{x\}_3 + 1408\{x\}_2 + 341\{x\}_1 + \{x\}_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

という感じになっています. 係数の決め方は [メモ I] の場合の階乗関数と基本的には同様ですが若干異なる点もあるので改めて例示しておきます.

例　x^{11} を「階乗関数」で表す.

- x^{11} を x で割った商 x^{10} を x^2-1 で割った余り 1 が a_0.
- x^{10} を x^2-1 で割った商 $x^8+x^6+x^4+x^2+1$ を x^2-4 で割った余り 341 が a_1.
- $x^8+x^6+x^4+x^2+1$ を x^2-4 で割った商 $x^6+5x^4+21x^2+85$ を x^2-9 で割った余り 1408 が a_2.
- $x^6+5x^4+21x^2+85$ を x^2-9 で割った商 x^4+14x^2+147 を x^2-16 で割った余り 627 が a_3.
- x^4+14x^2+147 を x^2-16 で割った商 x^2+30 を x^2-25 で割った余り 55 が a_4.
- x^2+30 を x^2-25 で割った商 1 が a_5.

少し見にくい記述になりましたが, このように $(x+k)(x-k),\ k=0,1,2,\cdots$ で割ってその余りで順次係数を求めることができます. 難しく考えるよりは, こういう種類のプロセスは習うより慣れろの精神が肝要です.

exercise.1 x^9 を上記例の方法で「階乗関数」で表してみましょう.

さておき, またまた余談ながらここに現れる係数は

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 14 \quad 21 \quad 1 \\
1 \quad 30 \quad 147 \quad 85 \quad 1 \\
1 \quad 55 \quad 627 \quad 1408 \quad 341 \quad 1 \\
1 \quad 91 \quad 2002 \quad 11440 \quad 13013 \quad 1365 \quad 1 \\
1 \quad 140 \quad 5278 \quad 61490 \quad 196053 \quad 118482 \quad 5461 \quad 1 \\
\vdots \qquad \vdots
\end{array}
$$

という具合になります． この数を N.J.A.Sloan の Web "On-Line Encyclopedia of Integer Sequences" で検索したところ "A008957" として検索結果が出ました． この数は central factorial numbers と呼ぶそうです．参考文献 [Knuth] によると J.Riordan"Combinatorial Identities"(John Wiley & Sons,1968) にその辺りの記述があるようですが興味ある方は直接そちらをあたってください．通常の階乗関数の場合の係数がスターリング数に関係がありましたから，この数も何らかの組合せ上の数理的意味を持つのだと推測されますがそのアタリの興味も読者の努力に任せましょう.[1] それにしても今の時代というのはこういう数列のデータベースがあるのですから便利というか驚いたというか ⋯ .

さて本線に戻って，n, k を整数としておいて

$$\{n\}_k = (2k+1)! \cdot {}_{n+k}\mathrm{C}_{2k+1}$$

となることは「階乗関数」から明らか．そうすると「階乗関数」で表されたものは組合せ記号で表されるということになります．このあとも組合せ記号を使うので見栄えを考慮して

$$\binom{n}{k} = {}_n\mathrm{C}_k$$

としておきます．そこで

$$
\begin{aligned}
n^1 &= \binom{n}{1} \\
n^3 &= 6\binom{n+1}{3} + \binom{n}{1} \\
n^5 &= 120\binom{n+2}{5} + 30\binom{n+1}{3} + \binom{n}{1} \\
n^7 &= 5040\binom{n+3}{7} + 1680\binom{n+2}{5} + 121\binom{n+1}{3} + \binom{n}{1} \\
n^9 &= 362880\binom{n+4}{9} + 151200\binom{n+3}{7} + 17640\binom{n+2}{5} + 510\binom{n+1}{3} + \binom{n}{1} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

となります．

ところで [メモ I] のときにも使った

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

[1] 無責任！

であることに注意すると, 例えば

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{n} m^7 &= 5040\sum_{m=1}^{n}\binom{n+3}{7} + 1680\sum_{m=1}^{n}\binom{n+2}{5} + 121\sum_{m=1}^{n}\binom{n+1}{3} + \sum_{m=1}^{n}\binom{n}{1} \\ &= 5040\binom{n+4}{8} + 1680\binom{n+3}{6} + 121\binom{n+2}{4} + \binom{n+1}{2}.\end{aligned}$$

したがってこの方法で同様な関係式が奇数べき和について得られます.

exercise.2 $\sum_{m=1}^{n} m^9,\ \sum_{m=1}^{n} m^{11}$ をそれぞれ上記と同様な形で表しましょう.

exercise.3 $S_4(n)$ を上記の方法で求めてみましょう.

簡単かつ有用なアルゴリズムのいくつか

ここでは, いくつかの文献に現れる有用なアルゴリズムのうち平易なものを紹介します.

Edwards-Owens-Bloom Algorithm

これは $S_k(n)$ から $S_{k+1}(n)$ を求めるというタイプのものの代表で, このタイプにはいくつかのバリエーションがあります. ここでは [Doucet and Saleh-Jahromi] において The Edwards-Owens-Bloom Algorithm として紹介されたアルゴリズムを行列形式で与えておきます. このことによって, 言葉での冗長な説明が不用になります.

$S_k(n) = \sum_{m=1}^{n} m^k = \sum_{j=1}^{k+1} a_j^k n^j$ に対して, Edwards-Owens-Bloom Algorithm とは以下のことを指します.

$$\begin{bmatrix} a_{k+2}^{k+1} \\ a_{k+1}^{k+1} \\ a_{k}^{k+1} \\ a_{k-1}^{k+1} \\ \vdots \\ a_{3}^{k+1} \\ a_{2}^{k+1} \\ a_{1}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{k+1}^k & & & & & & & \\ 0 & a_k^k & & & & & & \text{\Large 0} \\ 0 & 0 & a_{k-1}^k & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{k-2}^k & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_3^k & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2^k & \\ -a_{k+1}^k & -a_k^k & -a_{k-1}^k & -a_{k-2}^k & \cdots & -a_3^k & -a_2^k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{k+1}{k+2} \\ 1 \\ \frac{k+1}{k} \\ \frac{k+1}{k-1} \\ \vdots \\ \frac{k+1}{3} \\ \frac{k+1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

例 $k=11$ のとき

$$
\begin{bmatrix} a_{13}^{12} \\ a_{12}^{12} \\ a_{11}^{12} \\ a_{10}^{12} \\ a_{9}^{12} \\ a_{8}^{12} \\ a_{7}^{12} \\ a_{6}^{12} \\ a_{5}^{12} \\ a_{4}^{12} \\ a_{3}^{12} \\ a_{2}^{12} \\ a_{1}^{12} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{1}{12} & & & & & & & & & & & & \\
0 & \frac{1}{2} & & & & & & & & & & & \text{\Large 0} \\
0 & 0 & \frac{11}{12} & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{8} & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{6} & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{8} & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{12} & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
-\frac{11}{12} & -\frac{1}{2} & -\frac{11}{12} & 0 & \frac{11}{8} & 0 & -\frac{11}{6} & 0 & \frac{11}{8} & 0 & -\frac{5}{12} & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \frac{12}{13} \\ \frac{12}{12} \\ \frac{12}{11} \\ \frac{12}{10} \\ \frac{12}{9} \\ \frac{12}{8} \\ \frac{12}{7} \\ \frac{12}{6} \\ \frac{12}{5} \\ \frac{12}{4} \\ \frac{12}{3} \\ \frac{12}{2} \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= {}^t\begin{bmatrix} \dfrac{1}{13} & \dfrac{1}{2} & 1 & 0 & -\dfrac{11}{6} & 0 & \dfrac{22}{7} & 0 & -\dfrac{33}{10} & 0 & \dfrac{5}{3} & 0 & -\dfrac{691}{2730} \end{bmatrix}.
$$

さらに

$$
a_{k-i}^{k} = 0 \quad (i = 2, 4, 6, \ldots, \langle k \rangle + 1),
$$

（ここで $\langle k \rangle$ は k を超えない奇数を表すとする）ならば, 上記の等式は以下のようにも変形が可能となります.

$$
\begin{bmatrix} a_{13}^{12} \\ a_{12}^{12} \\ a_{11}^{12} \\ a_{9}^{12} \\ a_{7}^{12} \\ a_{5}^{12} \\ a_{3}^{12} \\ a_{1}^{12} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{1}{12} & & & & & & & \\
0 & \frac{1}{2} & & & & & & \text{\Large 0} \\
0 & 0 & \frac{11}{12} & & & & & \\
0 & 0 & 0 & -\frac{11}{8} & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{6} & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{8} & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{12} & \\
-\frac{11}{12} & -\frac{1}{2} & -\frac{11}{12} & \frac{11}{8} & -\frac{11}{6} & \frac{11}{8} & -\frac{5}{12} & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \frac{12}{13} \\ \frac{12}{12} \\ \frac{12}{11} \\ \frac{12}{9} \\ \frac{12}{7} \\ \frac{12}{5} \\ \frac{12}{3} \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= {}^t\begin{bmatrix} \dfrac{1}{13} & \dfrac{1}{2} & 1 & -\dfrac{11}{6} & \dfrac{22}{7} & -\dfrac{33}{10} & \dfrac{5}{3} & -\dfrac{691}{2730} \end{bmatrix}.
$$

ある種の Pascal matrix とべき和公式

次にべき和公式を求めるのに本質的な役割を果たすある行列について見ておこう.

Q を以下のような下三角行列とする. この行列はある種の Pascal matrix と言ってもよく, 各要素が符号つきであることはともかくとして, 二項係数で与えられます.

$$Q = \begin{bmatrix} \binom{1}{0} & & & & & \\ -\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & & & & \text{\Large 0} \\ \binom{3}{0} & -\binom{3}{1} & \binom{3}{2} & & & \\ -\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & -\binom{4}{2} & \binom{4}{3} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ (-1)^{k+1}\binom{k}{0} & (-1)^{k+2}\binom{k}{1} & (-1)^{k+3}\binom{k}{2} & (-1)^{k+4}\binom{k}{3} & \cdots & (-1)^{k+5}\binom{k}{k-1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -1 & 2 & & & & \text{\Large 0} \\ 1 & -3 & 3 & & & \\ -1 & 4 & -6 & 4 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ (-1)^{k+1}\binom{k}{0} & (-1)^{k+2}\binom{k}{1} & (-1)^{k+3}\binom{k}{2} & (-1)^{k+4}\binom{k}{3} & \cdots & (-1)^{k+5}\binom{k}{k-1} \end{bmatrix}$$

このとき Q を含む重要な等式が [Edwards] に見られます. このタイプの等式は, k の次数があまり大きくないいくつかの公式を得るのに極めて有効です. 一目瞭然ですがはじめのいくつかのべき和公式が一度に求められます.

$$\begin{bmatrix} S_0(n) \\ S_1(n) \\ S_2(n) \\ S_3(n) \\ S_4(n) \\ \vdots \\ S_{k-1}(n) \end{bmatrix} = Q^{-1} \begin{bmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ \vdots \\ n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \text{\Large 0} & \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & & \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & & \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{k-1} & a_2^{k-1} & a_3^{k-1} & a_4^{k-1} & \cdots & a_k^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ \vdots \\ n^k \end{bmatrix},$$

さらに, 次のような等式が [Schultz] に見られます.

$$\begin{bmatrix} a_1^k \\ a_2^k \\ a_3^k \\ \vdots \\ a_{k-1}^k \\ a_k^k \\ a_{k+1}^k \end{bmatrix} = ({}^tQ)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^t(Q^{-1}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

例として $S_9(n)$ を求めてみます．逆行列を求めるのは嫌なのですが次のようにしておいても大丈夫です．

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ & 2 & -3 & 4 & -5 & 6 & -7 & 8 & -9 & 10 \\ & & 3 & -6 & 10 & -15 & 21 & -28 & 36 & -45 \\ & & & 4 & -10 & 20 & -35 & 56 & -84 & 120 \\ & & & & 5 & -15 & 35 & -70 & 126 & -210 \\ & & & & & 6 & -21 & 56 & -126 & 252 \\ & & & & & & 7 & -28 & 84 & -210 \\ & & \text{\Large 0} & & & & & 8 & -36 & 120 \\ & & & & & & & & 9 & -45 \\ & & & & & & & & & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^9 \\ a_2^9 \\ a_3^9 \\ a_4^9 \\ a_5^9 \\ a_6^9 \\ a_7^9 \\ a_8^9 \\ a_9^9 \\ a_{10}^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

これを解くのは手計算でも別に難しくはありません．必ず最終の式から順に値が決まるからです．それでも面倒というなら Mathematica で逆行列でも求めてやれば

```
Inverse[{
{1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1},
{0,2,-3,4,-5,6,-7,8,-9,10},
{0,0,3,-6,10,-15,21,-28,36,-45},
{0,0,0,4,-10,20,-35,56,-84,120},
{0,0,0,0,5,-15,35,-70,126,-210},
{0,0,0,0,0,6,-21,56,-126,252},
{0,0,0,0,0,0,7,-28,84,-210},
{0,0,0,0,0,0,0,8,-36,120},
{0,0,0,0,0,0,0,0,9,-45},
{0,0,0,0,0,0,0,0,0,10}
}]//MatrixForm

%1.{0,0,0,0,0,0,0,0,0,1}
```

をそれぞれ実行して

$$\{0, -(\frac{3}{20}), 0, \frac{1}{2}, 0, -(\frac{7}{10}), 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}\}.$$

を得ます.[2]

[2] 入力が面倒だなあ …

あとがき

[メモ I] の続編を書いてみたが, 相変わらずこれまでよく知られている事実の羅列だ. とりわけ今回は実用的というよりも少し趣味的な色彩が濃い. それでも [Edwards], [Schultz] によるものなどは理屈が単純でもう少し知られてもよいものではないか, などと思ったりもした.

ところで, こうしてひとつの「自然数のべき和」というテーマをいくつかの方面から, そしていくつかのアプローチで取り扱ったものをまとめるということは実は楽しいことで, 砂浜の貝殻拾いにアナロジーを感じる. どこかの極東の島国の初等中等教育の数理科学教育政策の歴史的な質的・量的退行の中でそうした楽しさが, 今後きっと忘れ去られるであろうことに対するひとつの抵抗の意味も少しはあるのだけど, これは筆者だけの問題意識なのかもしれない. ただし, ここで取り上げた手法は, まだその実に一握りのものでしかありえない. 情報検索手段・情報収集手段が劇的に進歩した今日, 誰でもがその気にされなれば様々な数理的な記事・論文を入手することができる. ここで紹介しきれていない手法もきっと Web 上では多く存在するに違いない. 興味を持たれた方は各自で調べられたい. [3]

最後になったが余談までに, 今回の文献については国立国会図書館資料部文献提供課による文献複写サービスを利用した. 03 年度からはインターネットでの複写申し込みも可能になったようで, 研究者以外の者の文献利用が在宅で可能になったことは大きい. 今後もせいぜい利用したいものだ.

さておき, 今後 [メモ III] が出るかどうかはあまり期待しないでいて欲しいのである. これ以上の追求は趣味的に走りすぎると思っている. それも単なるいいわけだったか $\cdots$.

参考文献

- 組合せ数学入門 I 共立全書　共立出版（邦訳）
- 順列・組合せと確率 岩波書店
- 自然数のべき和に関するメモ I （文中表記 [メモ I] ）
- J.Doucet and A.Saleh-Jahromi, Sums of powers of integers, Research paper in Proceedings of the Louisiana-Mississippi Section of the Mathematical Association of America,Spring 2002
- A.W.F Edwards, Sums of powers of integers : a little of the history, Mathematical Gazette, 66(1982),22-28
- H.J.Schultz "The sums of the k-th powers of the first n integers" Amer.Math.Monthly 87(1980),478-481
- D.E.Knuth "Johann Faulhaber and Sums of Powers"(1992, preprint)
  http://www-cs-faculty.stanford.edu/ knuth/preprints.html
- The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (On-Line)
  http://www.research.att.com/ njas/sequences/

2003-03-15 , Typeset by LaTeX 2ε, 京都府立鳥羽高校定時制　稲葉芳成

……………………………………………………… 次頁のおまけにつづく

[3] おまけを付けておきました

おまけ

以下に, 知る限りでかつ入手がまあ困難でないであろうと思われる, べき和に関する参考文献をあげておく. 興味を持たれた方は各自でどうぞ！[4]まだ全部読んだワケではないのでコメントは付けません. 悪しからず.[5]

1. D.Acu, Some algorithm for the sums of integer powers, Mathematics Magazine,61(1988),189-191

2. I.Anderson, Sums of squares and binomial coefficients, Mathematical Gazette,65(1981),87-92

3. O.D.Anderson, Explicit formula for summing $1^k+2^k+\cdots+n^k$, Mathematics and Computer Education,24(1990),225-231

4. O.D.Anderson, Summing powers of integers, Mathematical Spectrum,23(1990/1991),116-121

5. A.B.Ayoub, A note on the sums of squares of natural numbers, Mathematics and Computer Education,26(1992),246-247

6. A.F.Beardon, Sums of powers of integers, American Mathematical Monthly 103(1996),201-213

7. D.M.Bloom, An old algorithm for the sum of integer powers, Mathematics Magazine, 66(1993),304-305

8. C.B.Boyer, Pascal's formula for the sums of powers of the integers, Scripta Math,9(1943),237-244

9. B.L.Burrows and R.F.Talbot Sums of powers of integers, American Mathematical Monthly 91(1984),394-403

10. J.H.Conway and R.K.Guy, The book of numbers, 1996,Springer-Verlag ISBN0-387-97993-X

11. A.Cupillari, Proof without words: $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots n^3=\frac{[n(n+1)]^2}{4}$, Mathematics Magazine,62(1989),259

12. D.Desbrow, Sums of integer powers, Mathematical Gazette,66(1982),97-100

13. J.Ding and T.H.Fay, Bernoulli numbers and calculating the sums $1^k+2^k+\cdots+n^k$, Mathematics and Computer Education,30(1996),70-79

14. J.Doucet and A.Saleh-Jahromi, Sums of powers of integers, Research paper in Proceedings of the Louisiana-Mississippi Section of the Mathematical Association of America,Spring 2002 (On-Line)
http://www.mc.edu/campus/users/travis/maa/proceedings/spring2002/doucet.jahroni.pdf

15. S.M.Edmonds, Sums of powers of natural numbers, Mathematical Gazette,41(1957),187-189

[4]まじめに調べれば, 科研費「奨励研究」くらいもらえるかもね. ははは！甘いか?!
[5]資料が間違っていたらゴメンナサイ !!

16. A.W.F Edwards, A quick route to sums of powers, American Mathematical Monthly 93(1986),451-455

17. A.W.F Edwards, Sums of powers of integers : a little of the history, Mathematical Gazette, 66(1982),22-28

18. T.H.Fay, Remarks on the sums of powers of integers, Mathematics and Computer Education, 30(1996),174-178

19. T.H.Fay and K.R.S.Sastry, A further note on the sums $1^k + 2^k + \cdots + n^k$, Mathematics and Computer Education,29(1995),253-261

20. T.H.Fay and K.R.S.Sastry, Sums of powers of an arithmetic progression, Mathematical Spectrum,30(1997/1998),10-12

21. T.H.Fay and B.L.Piazza A combinatorial approach to the calculation of $1^k + 2^k + \cdots + n^k$, Mathematics and Computer Education,29(1995),269-278

22. I.Gessel, A formula for power sums, American Mathematical Monthly,95(1988),961-962

23. I.M.Gessel and X.G.Viennot, Determinants, paths, and plane partitions, preprint,(1989)

24. S.-L.Guo and F.Qi, Recursion formulae for $\sum_{m=1}^{n} m^k$, Z.Anal.Anwendungen(J.Anal.Appl), 18(1999).4,1123-1130

25. S.L.Gupta An identity involving the sum of the kth powers of the first n natural numbers, Mathematical Gazette, 56(1972),128-129

26. E.Hairer and G.Wanner, Analysis by its history, UTM,1996,Springer-Verlag,ISBN0-387-94551-2

27. F.T.Howard, Sums of popwers of integers, Mathematical Spectrum,26(1993/1994),103-109

28. V.Kac and P.Cheung, Quantum calculus, Universitext,2000,Springer-Verlag

29. C.Kelly, An algorithm for sums of integer powers, Mathematics Magazine, 57(1984),296-297

30. S.Jafari, Summing the series $\sum_{r=1}^{n} r$ and $\sum_{r=1}^{n} r^2$ using Pascal's identity, Mathematical Spectrum,26(1993/1994),50-51

31. D.E.Knuth, Johann Faulhaber and sums of powers, Mathematics of Computation, 61(1993), 277-294

32. C.L.Liu, Intoroduction to combinatorial mathematics, 1968,McGraw-Hill,ISBN0-07-038124-0

33. G.Mackiw, A Combinatorial Approach to Sums of Integer Powers, Mathematics Magazine, 73(2000),44-46

34. J.Nunemacher and R.Young, On the sum of consecutive k-th powers, Mathematics Magazine, 60(1987),237-238

35. R.W.Owens, Sums of powers of integers, Mathematics Magazine,65(1992),38-40

36. R.V.Parker, Sums of powers of the integers, Mathematical Gazette,42(1958),91-95

37. J.L.Paul, On the sum of the kth powers of the first n integers, American Mathematical Monthly 78(1971),271-272

38. D.E.Penney and C.Pomerance, Multiplicative relations for sums of initial kth powers, American Mathematical Monthly 92(1985),729-731

39. H.J.Schultz, The sums of the k-th powers of the first n integers, American Mathematical Monthly 87(1980),478-481

40. M.J.A.Sharkey An identity involving the sums of powers, Mathematical Gazette, 57(1973), 131-133

41. B.Turner, Sums of powers of integers via the binomial theorem,Mathematics Magazine, 53(1980),92-96

42. J.Wiener, A calculus exercise for the sums of integer powers, Mathematics Magazine, 65(1992), 249-251

43. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (On-Line)
http://www.research.att.com/ njas/sequences/

44. Eric W. Weisstein, world of MATHEMATICS (On-Line)
http://mathworld.wolfram.com/

2003-03-15 , Typeset by LaTeX 2_ε, 京都府立鳥羽高校定時制　稲葉芳成