自然数のべき和に関するメモ I

直感的方法・階乗関数・スターリング数・和分・差分・ベルヌーイ多項式

ver1.3

はじめに

この文章は, いくつかの文献を参考にして, 自然数のべき和について記した単なるメモです. 新しい事柄は含まれていませんので悪しからず.

教科書スタイル

最近は易しい教科書が増えたせいかべき和の公式もあまりやらないらしい. 本当かな？それはひとまず置いて, 教科書の平方和の公式の導出はよく知られた方法というか教科書流の常套手段で恒等式

$$k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$$

に依るもの. ここから $k = 1, 2, 3, \cdots, n$ を代入した式を辺々加えて

$$n^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n$$

を得, あとは自然数和

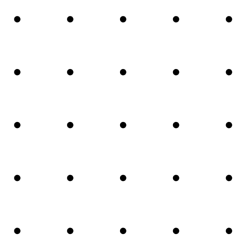
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

を使って変形するという具合. やっぱりこれが単純でわかりやすい方法でしょう. 喰えないところは始めの恒等式ですが, これは慣れの問題なので我慢してもらいましょう. この方法では恒等式を例えば $k^4 - (k-1)^4 = 4k^3 - 6k^2 + 4k - 1$ で与えてやればあとは同じ方法で立方和の公式を得ることができます.

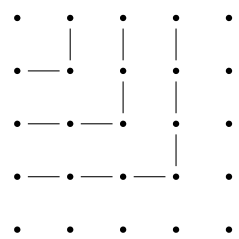
exercise.1 $\sum_{k=1}^{n} k^3$ を求めましょう.

直感的理解

次によく知られた直感的理解の方法を見ながら, ついでなので例の $k^p - (k-1)^p$ の恒等式の意味について触れておこう. 例えば



のような点の個数を数えることを考えればよい. この場合は $5 \times 5 = 25$ だけれども 1 辺が n 個ある場合には当然のことながら総数は n^2 個です. さておき数え方を少し変えてみることにします.

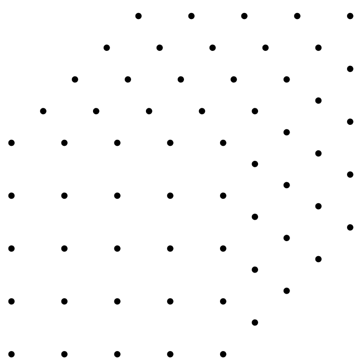


見てわかるように線で繋いだ逆 L 字の個数を足していく方法で数えると, k 列目の逆 L 字の個数は $k^2-(k-1)^2=2k-1$ となることは明らかで, これは先ほどの恒等式の $p=2$ の場合になっています. これを 1 〜 n 列まで足せば全体になるから

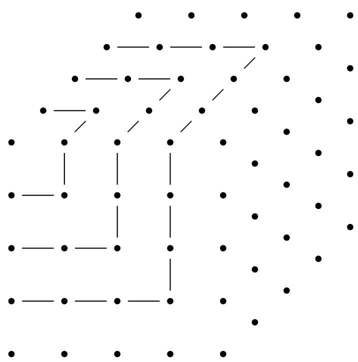
$$n^2=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$

となってあとは変形するだけで自然数和の公式が得られます. まあ図形的な説明にこじつけただけなのですが ⋯ .

どうせのついでにもうひとつやっておこう.



のような立方体状に並んだ点の個数を考えると, また当たり前のように $5\times5\times5=125$ ですが, ここで 1 辺が n 個ある場合には当然のことながら総数は n^3 個です. さておきまたもや数え方を少し変えてみることにします.



見てわかるように線で繋いだ正面から見て逆 L 字の面（言葉で説明しにくいのですが）の個数を足していく方法で数えると, k 列目の逆 L 字の面の個数は $k^3-(k-1)^3=3k^2-3k+1$ となることは明らかで, これは先ほどの恒等式の $p=3$ の場合になっています. これを 1 〜 n 列まで足せば全体になるから

$$n^3=\sum_{k=1}^{n}(3k^2-3k+1)$$

となってあとは変形するだけで平方和の公式が得られます. これ以上の次数になると 4 次元などの立方体を考えるということになってしまうので直感のレベルを超えてしまい駄目ですが, なんとなくこのようなことで考えると先の恒等式のことも理解できるでしょうか.

直感的理解 II（奇数べき和公式）

乗りかかった舟という感じでもう少し直感的な方法を考えましょう．これもよく知られているかどうかは不明ですが本質的に 1987 年 2 月の「数学セミナー」の記事に依るものです．

1	**2**	3	**4**	5
2	**4**	6	**8**	10
3	6	9	**12**	15
4	**8**	**12**	**16**	20
5	10	15	20	25

という具合に i 行 j 列に積 ij を置いたものを考えて, この和を先の自然数和の公式を求めたのと同様に求めてみます．1 辺が n 個ある場合には当然のことながら総数は

$$(1+2+3+\cdots+n)(1+2+3+\cdots+n)=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

個です．さておきまたもや数え方を少し変えてみることにします．先の場合のように細字と太字で分けた逆 L 字の個数を足していく方法で数えると, k 列目の逆 L 字の個数は

$$k(1+2+3+\cdots+k+(k-1)+\cdots+3+2+1)=k^3$$

で, これを 1 〜 n 列まで足せば全体になるから

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\{\frac{1}{2}n(n+1)\}^2$$

を得たことになります．

実はこの表で i 行 j 列に 1 を置いて考えると（つまりすべて 1）自然数和の公式が得られます．先ほどの正方形の形に点を置いた例と全く同じになります．

1	**1**	1	**1**	1
1	**1**	1	**1**	1
1	1	1	**1**	1
1	**1**	**1**	**1**	1
1	1	1	1	1

さてそこで次に i 行 j 列に積 i^2j^2 を置いて考えます．それとはじめに平方和と立方和の公式は既知としておきます．

1	4	9	16	25
4	16	36	64	100
9	36	81	144	225
16	64	144	256	400
25	100	225	400	625

1 辺が n 個ある場合には当然のことながら総数は

$$(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=\frac{1}{36}n^2(n+1)^2(2n+1)^2$$

個です．もちろんここで平方和の公式は既知としていますが，まあそれは許してもらいましょう．さておきまたもや数え方を少し変えてみることにします．先の場合のように逆 L 字の個数を足していく方法で数えると，k 列目の逆 L 字の個数は

$$k^2(1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k-1)^2+\cdots+3^2+2^2+1^2)=\frac{1}{3}k^2(2k^3+k).$$

$1\sim n$ 列まで足せば全体になるから

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}k^2(2k^3+k)=\frac{1}{36}n^2(n+1)^2(2n+1)^2.$$

これを整理すると

$$\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$

を得たことになります．

このように考えると少なくとも $p=0,1,2$ に対して i 行 j 列に積 i^pj^p を置いて考えれば $\sum_{k=1}^{n}k^{2p+1}$ のべき和公式が得られることがわかります．これはもっと大きな p に対しても成り立つのでしょうか？ぜひ確かめてみてください．

最後に偶数乗の公式を得るためのうまい方法は知りませんのであしからず．

exercise.2 $\sum_{k=1}^{n}k^5$ を既知として今のやりかたで $\sum_{k=1}^{n}k^7$ を求めましょう．

直感的理解 III

ここまできたらついでのついでに乗りかかった泥舟という感じでもうしばらく直感的な方法を考えましょう．これもよく知られているかどうかは不明ですが個人的には気に入ってよく使います．

1	**2**	3	**4**	5
2	3	**4**	5	
3	**4**	5		
4	5			
5				

という具合に数字を並べます．i 行 j 列に $i+j-1$ を置くということになるでしょうか．もちろん $i+j>n+1$ （今は $n=5$）となるところには置数しません．

考え方はいつもの通りで 2 通りの数え方をすればよろしい．まずは細字と太字で分けた斜めの数字を見れば k 列目の斜めの数字の和が k^2 になっていることは自明です．つまりこの方法で全体を数えると $\sum_{k=1}^{n}k^2$.

一方で縦の列毎に見ていくと，k 列目は $k\sim n$ の和ですから $\sum_{j=k}^{n}j$ ということで

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}j=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{2}k(k-1))$$

$$= \frac{1}{2}n^2(n+1) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{2}n^2(n+1) + \frac{1}{4}n(n+1).$$

したがって

$$\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{4}n(n+1)(2n+1)$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

となり, 平方和の公式が導けました.
この方法では i 行 j 列に 1 を置いて

1	**1**	1	**1**	1
1	1	**1**	1	
1	**1**	1		
1	1			
1				

で考えれば $\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}$ という関係式から $\sum_{k=1}^{n} k$ の式が得られます. さらに,

1	**4**	9	**16**	25
4	9	**16**	25	
9	**16**	25		
16	25			
25				

で考えると

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n} j^2 = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{6}k(k-1)(2k-1))$$
$$= \frac{1}{6}n^2(n+1)(2n+1) - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k^3 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} k$$
$$= -\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k^3 + \frac{1}{6}n^2(n+1)(2n+1) + \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{12}n(n+1)$$
$$= -\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k^3 + \frac{1}{12}n(n+1)\{2n(2n+1) + (2n+1) - 1\}$$
$$= -\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k^3 + \frac{1}{12}n(n+1)(4n^2 + 4n)$$
$$= -\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k^3 + \frac{1}{3}n^2(n+1)^2.$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

長くなるので計算は省略しますが

1	**8**	27	**64**	125
8	27	**64**	125	
27	**64**	125		
64	125			
125				

で $\sum_{k=1}^{n} k^4$ の式も得られます.

exercise.3 このことを確かめてみましょう.

ジョルダンの階乗関数 (階乗記号)

まずはじめに大切な多項式関数を定義します.

$$(x)_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$
$$(x)_0 = 1$$
$$(x)_n = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x-n)} \qquad n = -1, -2, -3, \cdots$$

この x の関数 $(x)_n$ をジョルダンの階乗関数と呼びます.

例 $(x)_1 = x$

例 $(x)_3 = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$

exercise.4 $(x)_4,\ (x)_5$ を求めましょう.

階乗関数で表す

通常の多項式の関数を階乗関数に直すことを考えてみます. 例えば最も簡単な例として $f(x) = x^2$ を階乗関数で表してみましょう. それには

$$x^2 = a(x)_2 + b(x)_1 + c = ax(x-1) + bx + c$$

という式を作り, 実際に係数を比較して未定係数 a, b, c を求めるのが常套手段です. この場合には $a = 1,\ b = -1,\ c = 0$ となります.

しかし実際には次数が高くなったりすると計算が煩雑になるのでこの方法は余り一般的ではありません. 通常は以下のようにします.

$$x^n = a_1(x)_n + a_2(x)_{n-1} + a_3(x)_{n-2} + \cdots + a_{n+1}$$

という等式の右辺を x で割ればその余りは明らかに a_{n+1} です. 出てきた商を $x-1$ で割れば余りが a_n となることもすぐにわかります. そして次にまた商を $x-2$ で割れば余りが a_{n-1} となります. 以下繰り返せば未知数が次々と求められるのは見当がつきます.

例 $2x^3+x^2+4x-3$ を階乗関数で表す.

$$
\begin{aligned}
2x^3+x^2+4x-3 &= x(2x^2+x+4)-3 \qquad \cdots d=-3\\
2x^2+x+4 &= (x-1)(2x+3)+7 \qquad \cdots c=7\\
2x+3 &= (x-2)2+7 \qquad \cdots b=7\\
2 &= (x-3)0+2 \qquad \cdots a=2
\end{aligned}
$$

したがって $2x^3+x^2+4x-3=2(x)_3+7(x)_2+7(x)_1-3.$

このプロセスは組み立て除法を知っていればもっと簡単にできるでしょう.

exercise.5 以下の関数を階乗関数で表しましょう.

(1) x^4
(2) x^3-5x^2+7

スターリング数

ここで階乗関数と関係の深い特殊な数を紹介しましょう. ここのところは本質的に文末に掲げた「組み合せ論入門」に依ります.

第 1 種のスターリング数とは

$$(x)_n=\sum_{k=1}^{n} S_n^k x^k \qquad n=1,2,3,\cdots$$

で表される S_n^k のことをいいます. その値は縦に n, 横に k をとると

	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
1	1							
2	-1	1						
3	2	-3	1					
4	-6	11	-6	1				
5	24	-50	35	-10	1			
6	-120	274	-225	85	-15	1		
7	720	-1764	1624	-735	175	-21	1	
$\vdots$								

となります. また第 2 種のスターリング数とは

$$x^n=\sum_{k=1}^{n} \mathfrak{S}_n^k \cdot (x)_k \qquad n=1,2,3,\cdots$$

で表される $\mathfrak{S}_n^k$ のことをいいます. その値は縦に n, 横に k をとると

	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
1	1							
2	1	1						
3	1	3	1					
4	1	7	6	1				
5	1	15	25	10	1			
6	1	31	90	65	15	1		
7	1	63	301	350	140	21	1	
$\vdots$								

となります．これらの表から $(x)_4 = x^4 - 6x^3 + 11x - 6$ や $x^4 = (x)_4 + 6(x)_3 + 7(x)_2 + (x)_1$ であることはすぐに知れます．スターリング数は実は組合せ的な意味を持つのですがここでは触れません．

自然数のべき和 $\sum_{k=1}^{n} k^t$ については $\sum_{k=1}^{n} k^t = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{t} \mathfrak{S}_t^j \cdot (k)_j$ と表されることはすぐにわかりますが, これは単にべき和を書き換えたにすぎない式で, このままでは実用的ではありません．

$x(x-1)$ や $x(x-1)(x-2)$ を見ているうちに気が付く場合もあると思いますがこの式は x が整数の場合には順列の式に他なりません．ですから $(k)_j$ という階乗関数は, k が整数であることを考えれば, 組合せ記号 C を用いて ${}_k\mathrm{C}_j \cdot j!$ と書けます．そうすると

$$\sum_{k=1}^{n} k^t = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{t} \mathfrak{S}_t^j \cdot (k)_j = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{t} \mathfrak{S}_t^j \cdot {}_k\mathrm{C}_j \cdot j! = \sum_{j=1}^{t} (\mathfrak{S}_t^j \cdot j! \sum_{k=1}^{n} {}_k\mathrm{C}_j)$$

一方

$$\begin{aligned}
{}_{n+1}\mathrm{C}_{j+1} &= {}_n\mathrm{C}_j + {}_n\mathrm{C}_{j+1} \\
&= {}_n\mathrm{C}_j + {}_{n-1}\mathrm{C}_j + {}_{n-1}\mathrm{C}_{j+1} \\
&= {}_n\mathrm{C}_j + {}_{n-1}\mathrm{C}_j + {}_{n-2}\mathrm{C}_j + {}_{n-2}\mathrm{C}_{j+1} \\
&\vdots \\
&= {}_n\mathrm{C}_j + {}_{n-1}\mathrm{C}_j + {}_{n-2}\mathrm{C}_j + \cdots + {}_0\mathrm{C}_j + {}_0\mathrm{C}_{j+1}
\end{aligned}$$

いま $j \geq 1$ だから ${}_0\mathrm{C}_j$ 以降は 0．したがって

$$\sum_{k=1}^{n} {}_k\mathrm{C}_j = {}_{n+1}\mathrm{C}_{j+1}$$

を得て, 結局

$$\sum_{k=1}^{n} k^t = \sum_{j=1}^{t} \mathfrak{S}_t^j \cdot j! \cdot {}_{n+1}\mathrm{C}_{j+1}.$$

例

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{j=1}^{3} \mathfrak{S}_3^j \cdot j! \cdot {}_{n+1}\mathrm{C}_{j+1} \\ &= \mathfrak{S}_3^1 \cdot 1! \cdot {}_{n+1}\mathrm{C}_{1+1} + \mathfrak{S}_3^2 \cdot 2! \cdot {}_{n+1}\mathrm{C}_{2+1} + \mathfrak{S}_3^3 \cdot 3! \cdot {}_{n+1}\mathrm{C}_{3+1} \\ &= {}_{n+1}\mathrm{C}_2 + 6 \cdot {}_{n+1}\mathrm{C}_3 + 6 \cdot {}_{n+1}\mathrm{C}_4 \\ &= \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.\end{aligned}$$

この式はさらに変形が可能であるけれども難儀なので文末の参考図書に直接あたられたい.

差分・和分

整数を定義域とする関数 $y = f(x) \quad x = 0, 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$f(x+1) - f(x)$$

を $f(x)$ の 1 階差分または, 単に差分または階差と呼び, $\Delta f(x)$ で表すことにします.

例 $\Delta x = (x+1) - x = 1$

例 $\Delta x^2 = (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1$

また $\Delta(\Delta f(x))$ を $\Delta^2 f(x)$ と書き, 2 階差分と呼びます. つまり

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x).$$

同様にして $\Delta^3 f(x)$ なども定めることにします.

差分は階差とも呼ばれますから, 数列のところで出てきた階差数列も差分のひとつです. 差分から $f(x)$ を求めるプロセスは階差数列から元の数列の一般項を求めることの類似です.

また, 差分の逆が考えられます. $\Delta F(x) = f(x)$ を満たすような $F(x)$ を $f(x)$ の不定和分と呼び, $\Delta^{-1} f(x)$ と書くことにします. また定和分というのも $\Delta_{a,b}^{-1} f(x) = F(b) - F(a)$ によって定義されます. 差分・和分は微分・積分に類似しています. 積分と同様に定和分というものもあります.

いづれも実際の計算は階乗関数の場合が便利です. 階乗関数の場合に差分は次のように計算できます.

$$\Delta(x)_n = n\Delta(x)_{n-1}$$

$n = 0$ の場合には明らかなので, まず $n \geqq 1$ のときを示します.

$$\begin{aligned}\Delta(x)_n &= (x+1)x(x-1)\cdots(x-n+2) - x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) \\ &= x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+2)n \\ &= n(x)_{n-1}\end{aligned}$$

次に $n \leqq -1$ のとき

$$\begin{aligned}\Delta(x)_n &= \frac{1}{(x+2)(x+3)\cdots(x-n+1)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x-n)} \\ &= \frac{n}{(x+1)(x+3)\cdots(x-n+1)} \\ &= n(x)_{n-1}\end{aligned}$$

同様に

$$\Delta^{-1}(x)_n = \frac{1}{n+1}(x)_{n+1} + c \quad c \text{ は和分定数と呼ばれる定数, また } n \neq -1.$$

級数の和と和分

和分が重要なのは, 級数との関連にあります. いま $\Delta F(x) = f(x)$ とします. ここで $x = m, m+1, m+2, \cdots, n-1$ とします. それを順次代入して両辺の和をとれば

$$F(n) - F(m) = \sum_{x=m}^{n-1} f(x)$$

を得ます. ここで左辺は定和分 $\Delta_{m,n}^{-1} f(x)$ と書けるので, 結局

$$\Delta_{m,n}^{-1} f(x) = \sum_{x=m}^{n-1} f(x)$$

となり, 級数の和が定和分で表されていることになります.

例

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} \{(k)_3 + 3(k)_2 + (k)_1\} = \Delta_{1,n+1}^{-1} \{(k)_3 + 3(k)_2 + (k)_1\} \\ &= \frac{1}{4}(n+1)n(n-1)(n-2) + (n+1)n(n-1) + \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \{\frac{1}{2}n(n+1)\}^2.\end{aligned}$$

exercise.6 和分を用いて $\sum_{k=1}^{n} k^4$ を求めましょう.

ベルヌーイ多項式と和分

母関数

$$\frac{u}{e^u - 1} = 1 + \frac{B_1}{1!}u + \frac{B_2}{2!}u + \frac{B_3}{3!}u + \frac{B_4}{4!}u + \cdots$$

の係数として得られる数はベルヌーイ数と呼ばれよく知られています. 少し書き上げると

$$\begin{array}{llll} B_0 = 1, & B_1 = -\dfrac{1}{2}, & B_2 = \dfrac{1}{6}, & B_4 = -\dfrac{1}{30}, \\ B_6 = \dfrac{1}{42}, & B_8 = -\dfrac{1}{30}, & B_{10} = \dfrac{5}{66}, & B_{12} = -\dfrac{691}{2730}, \\ B_{14} = \dfrac{7}{6}, & B_{16} = -\dfrac{3617}{510}, & B_{18} = \dfrac{43867}{798}, & B_{20} = -\dfrac{174611}{330}, \cdots \end{array}$$

であり, 奇数番（3 以上）はすべて 0 です. また

$$\begin{aligned} B_1(x) &= B_0 x + B_1 \\ B_2(x) &= B_0 x^2 + 2B_1 x + B_2 \\ B_3(x) &= B_0 x^3 + 3B_1 x^2 + 3B_2 x + B_3 \\ B_4(x) &= B_0 x^4 + 4B_1 x^3 + 6B_2 x^2 + 4B_3 x + B_4 \\ &\vdots \\ B_n(x) &= \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i B_i x^{k-i} \end{aligned}$$

で定義される多項式 $B_k(x)$ をベルヌーイ多項式といいます．具体的に計算すると

$$
\begin{aligned}
B_1(x) &= x - \frac{1}{2} \\
B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6} \\
B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \\
B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

などとなります．ここで，ベルヌーイ多項式の母関数も与えておこう．

$$\frac{ue^{xu}}{e^u - 1} = 1 + \frac{B_1(x)}{1!}u + \frac{B_2(x)}{2!}u^2 + \frac{B_3(x)}{3!}u^3 + \frac{B_4(x)}{4!}u^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{u^n}{n!}$$

ベルヌーイ多項式 $B_n(x)$ は差分方程式

$$f(x+1) - f(x) = nx^{n-1}$$

を満たします．これは母関数表示から

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x+1) - B_n(x)}{n!}u^n = \frac{ue^{(x+1)u}}{e^u - 1} - \frac{ue^{ux}}{e^u - 1} = ue^{ux} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n u^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}u^n}{n!}$$

の係数比較によって導かれます．

したがって

$$\Delta^{-1}x^n = \frac{1}{n+1}B_{n+1}(x) + c$$

という関係式も得られます．x^n の和分はベルヌーイ多項式と密接な関係を持っていることもわかります．簡単にわかることですが

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

の x に順次 $0, 1, 2, 3, \cdots, p$ を代入して加えれば

$$\sum_{k=1}^{p} k^{n-1} = \frac{B_n(p+1) - B_n(0)}{n}$$

を得ます．この式は自然数のべき和をベルヌーイ多項式で表したものになっています．

例

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^4 &= \frac{B_5(n+1) - B_5(0)}{5} \\
&= \frac{1}{5}(n^5 + \frac{5}{2}n^4 + \frac{5}{3}n^3 - \frac{1}{6}n) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}
\end{aligned}
$$

exercise.7 上記の関係を用いて $\sum_{k=1}^{n} k^5$ を求めましょう．

オイラー・マクローリンの和公式

関数 $f(x)$ が与えられたとき

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)=\sum_{i=1}^{n}f(i)$$

に対する公式を与えたものが.

$$\sum_{i=1}^{n}f(i)=\int_0^n f(x)dx+\frac{1}{2}(f(n)-f(0))+\frac{1}{12}(f'(n)-f'(0))-\frac{1}{720}(f'''(n)-f'''(0))$$
$$+\frac{1}{30240}(f^{(5)}(n)-f^{(5)}(0))+\cdots$$

のようになるというのがそれです. この公式の導き方は, 例えばもともとのオイラーに依るものなどが文末の参考書などで見ることができます. ベルヌーイ数を用いて書けば

$$\sum_{i=1}^{n}f(i)=\int_0^n f(x)dx+\frac{1}{2}(f(n)-f(0))+\sum_{k\geq 1}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(f^{(2k-1)}(n)-f^{(2k-1)}(0))$$

となります.

この式で $f(x)=x^n$ とすればべき和を求めることができます.

例

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\int_0^n x^3dk+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{12}\cdot 3n^2=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2=\{\frac{1}{2}n(n+1)\}^2$$

exercise.8 オイラー・マクローリンの和公式を用いて $\sum_{k=1}^{n}k^4$ を求めましょう.

あとがき

以上, 教科書の方法からはじめて, くどくなったが直感的な理解という意味で図形的な取り扱いに紙数をさいた. 中には必ずしも直感的でないものがあるがやっぱりこういうのが一番説明しやすいのだからまあいいだろう. そのあと組合せ論的あるいは解析的な方法を少しまとめてみた. すでによく知られたことばかりで新鮮さは無いものだから小さな読み物として使うものだろう

階乗関数によって通常の多項式関数を表すことは簡単な変形であるが, そのことで差分・和分に関する性質を用いることができる. 一方その両者を結びつける特殊な数であるスターリング数は本来, 組み合せ論的な重要な意味合いを持つ数である. 級数の和が和分によって表されるという性質と x^n がベルヌーイ多項式と密接な関係があるということで話を進めたところは, 特にベルヌーイ数やベルヌーイ多項式の取り扱いが天下り的であった. 適当な書物でさまざまな側面を深めてもよいと思われる. また本来ならば差分の話ももう少し丁寧にすすめたほうがよかったのかも知れない.

とにかくさまざまな分野のことがらを整理することで精一杯であり少し読みにくいものとなったかも知れない. ましてやミスタイプも含めて過りも含まれる可能性が大であることも断っておきたい.

最後に参考文献に揚げた「解析教程」と「Quantum Calculus」は印象的な本だ. 後者はまだ邦訳がないが高校生でも十分に読める q 解析の初等的入門書であることも付け加えておきたい.

参考文献

- 解析教程 Springer（邦訳）
- 組み合せ論入門 近代科学社（邦訳）
- 差分方程式入門 コロナ社
- 解析学１ 総合図書（邦訳）
- 順列・組み合せと確率 岩波書店
- 数学セミナー vol.25,no.11, vol.26,no.02 日本評論社
- Quantum Calculus, Universitext, Springer

2003-01-16 , Typeset by $\LaTeX\,2_\varepsilon$, 京都府立鳥羽高校定時制　稲葉芳成