サイコロを振ってみたら出た目の確率が 1/6とはほど遠くなるのってどうなのか？

―適合度の検定―

平　田　嘉　宏（北海道立教育研究所　研究・相談部）

要約

出る目が同様に確からしいサイコロでも実際には理論値どおりの回数ずつ出るわけではないことの統計的根拠を、カイ二乗適合度検定を用いて示した。併せて、こうした統計処理を行う上で、最近大変使いやすくなってきたオープンソース・ソフトウェアを用いた統計処理や、ソフトウェアそのものについて紹介した。

キーワード：カイ二乗値、カイ二乗適合度検定、統計計算言語環境R、Rコマンダー、College Analysis, js-STAR, PSPP, HAD

Keywords: chi-square value, chi-square goodness of fit test, R: A language and environment for statistical computing, R Commander, College Analysis, js-STAR, PSPP, HAD

１　サイコロの出た目の確率がそれぞれあまり1/6に近くならないことはどう説明したらよいか

従来から、高等学校においては、確率と統計は意識して区別することなく指導している。しかし、指導する側にとっては、時として、確率と統計は別物と意識しておく必要のある場面がある。

例えば、サイコロを何度も振ったときに、出る目の確率がそれぞれ1/6に近づくという確率の理論に対して、実際には、生徒が何度も振った結果が、1/6とはほど遠い確率になる場合である。

このとき、生徒は「どうして1/6に近づかないんですか」とは質問しない。

おそらく、理論的に納得しているが、現実的にはゲームなどで、そうきれいには確率は揃わないと「経験的に」納得しているからではないだろうか。

ここに、「確率」的な考え方と、「統計」的な考え方の区別がある。生徒は無意識にそれを使い分けている可能性があるが、指導する側としては、もし生徒に質問されたときに答えられた方がよいであろう。

実際、宿題として「60回サイコロを振って出た目の回数を記録し、提出しなさい」という課題を生徒に示し、提出された課題が次の表１のようだった場合、指導する立場としてどう捉えたらよいだろうか。

表１　1/6とはほど遠い結果

出た目	1	2	3	4	5	6
回数	4	13	12	7	15	9

このサイコロの目の出方が同様に確からしいとはいえないかもしれないが、判断の仕方は高校数学の範囲をこえている。

さらには、提出された課題が次の表２のようだった場合はどう考えたらよいだろうか。

表２　1/6にかなり近い結果

出た目	1	2	3	4	5	6
回数	9	11	12	10	8	10

本当にこのようにきれいに目が出ることがどの程度あり得るのかの判断の仕方は、高校数学の範囲をこえる。これらが解決できるのは確率ではなく統計の分野である。

そこで、本稿では、統計的手法として、カイ二乗値を用いた適合度の検定（カイ二乗適合度検定）を用いて、表１や表２における「確率」の理論と現実の結果のギャップを「統計」によって解決することを目的とし、示していくこととした。

２　カイ二乗(χ^2)値を用いた「適合度の検定」

（１）カイ二乗値とは

解決策として用いるカイ二乗値は、大学入学後に履修する統計学では必ずといいっていいほど取り扱われるものである。

一般に、カイ二乗値は、確率変数Xが正規分布$N(0,1)$に従っているとき、独立に抽出されたn個の標本$x_1, x_2, \dots, x_n$と、それぞれの標本の期待値$e_1, e_2, \dots, e_n$を用いて

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - e_i)^2}{e_i}$$

で求められる統計量として定義されており、自由度$n-1$のχ^2分布に従う[1]。

よって、表１、表２のサイコロの場合のカイ二乗値は

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{6} \frac{(x_i - 10)^2}{10} \quad \cdots①$$

で求めることができる。ただし、x_iはiの目が出た回数、10は回数の期待値、6はサイコロの目の総数である。①から分かるように、期待値から出た目が大きくはずれればはずれるほどカイ二乗値は大きな値となる。もし全く期待値通りの結果なら、カイ二乗値は0になる。

これから、正規分布による検定の手順と同様に、カイ二乗値を用いた適合度の検定（以下「適合度の検定」という。）を行う。適合度の検定によって、表１や表２を示した際の課題を解決することができる。

（２）適合度の検定とは

適合度の検定とは、得られたデータの分布が理論的な分布とどの程度離れていて、それがよくあることかどうかを検定するものである。

（３）カイ二乗値にかかわる自由度について

自由度は、適合度の検定を行う上で必要となる数値である。今回のように条件が単純で、1次元の表のデータの場合、自由度は、出た目の種類の6よりも1だけ小さい5になる（df=5と表記する。）。

（４）「表１　1/6とはほど遠い結果」の考察

表１の結果を、カイ二乗値を求めるために①に代入すると、簡単に$\chi^2 = 8.4$と求まる。

自由度5、有意水準$\alpha = 0.05$としてカイ二乗分布の表（統計学の基本を記述した本には大抵載っている）の該当箇所(自由度5かつ$\alpha = 0.05$)をみると、11.07という値が得られる。つまり、カイ二乗値が11.07だとこのようなことは5%ぐらいしか起こらないことになる。今回は、

$\chi^2 = 8.4 < 11.07$

なので、5%よりも起こりやすいことだったことになる。

つまり、「このサイコロの目の出方は同様に確からしい」ということを否定することはちょっとできないだろうということである。

（５）（４）をオープンソース・ソフトウェアRで求める場合

統計計算言語環境Rを起動させたコンソール画面に、次の１行を入力するだけでよい。

```
chisq.test( c(4,13,12,7,15,9) )
```

結果は次のように出力される。

```
Chi-squared test for given probabilities
data:  c(4, 13, 12, 7, 15, 9)
X-squared = 8.4, df = 5, p-value = 0.1355
```

これは、「カイ二乗値が8.4で(自由度5)、このようなことが起こる確率は0.1355」という意味である。

1　この統計量には、このほか連続的な分布の定義があるので、参考までに7に記した。

$\alpha = 0.05 < 0.1355$

と、5%よりも起こりやすいことだったことになる。

（６）「表２　1/6にかなり近い結果」の考察

表２の結果を表１同様に①に代入すると$\chi^2 = 1$となる。

カイ二乗分布の表のどこを見てどう判断するかについてだが、表２の場合は理論値に近すぎるので、カイ二乗値が0に近い方から5%以内にあるかをみることになる。あれば「このサイコロの目の出方は同様に確からしい」ということを否定するのが妥当だということになる。そこで、カイ二乗分布の表の自由度5、有意水準$\alpha = 0.95$の箇所をみると、1.145という値が得られる。

$\chi^2 = 1 < 1.145$

であるため、5%よりも起こりにくい結果だったことになる。つまり、「このサイコロの目の出方は同様に確からしい」ということを否定するのが妥当だということである。

（７）（６）をＲで求める場合

（５）同様にＲに入力すると、最後のp-valueとして0.9626が得られる。よって、このようなことが起こる確率は

$1 - 0.9626 = 0.0374$

と、5%よりも起こりにくいことだったことが分かる。

（８）表１と表２のさらなる検討

ここからは統計を取り扱う際の留意点について述べる。

表１と表２を別々に5%の有意水準でみてきたわけだが、5%という割合は１クラス40人とすると２人にあたる。すると、（４）と（６）で求めたカイ二乗値を組み合わせた

$1.145 < \chi^2 < 11.07$

の範囲からはずれる生徒は、４人ぐらい出てきて当たり前で、有意水準10%ということになってしまう。有意水準10%は、場合によっては使うが、理論値から離れすぎの場合と近づきすぎの場合の両方を一度に確かめたい場合は、両側検定で有意水準5%（40人中２人)の方がよい。

具体的には、表１や表２の考察は片側検定だったので、片側ずつを2.5%とすれば、カイ二乗値として、

$0.8312 < \chi^2 < 12.83$　…②

の範囲から外れる場合が5%ぐらいあるということになる。

すると、表２の場合の解釈は、$\chi^2 = 1$だったので、②の範囲に含まれてしまい、「有意差があるとまではいえない」と、<u>統計的な結論が変わることになる</u>。

当初とは異なるこの結論をどう解釈するかは、結局指導する教員が考え判断することになる。統計の結果は、科学的結果を導くための判断材料であり、判断の確たる根拠ではない。このことは、統計的手法を運用する上で押さえておくべきポイントである。

留意点をまとめると、①片側検定か両側検定かの意識をもつことが必要であること、②統計の結果は絶対ではなく、<u>「最終判断は自分がすること」</u>となる。

留意点はこれだけではないが、取り上げればきりがなくなるので、この２点にとどめておく。

３　R CommanderやCollege Analysis等によって求める場合

統計処理に適したオープンソース・ソフトウェアはいろいろある。これらを用いて複雑な統計処理が簡便に処理できるので、授業のみならず校務の処理などに活用できる可能性があるため、いくつか紹介する。

（１）R Commander

R CommanderはＲを簡単に用いるためのGUIが特長である。インストールするのも簡単である。

例えば、表１のデータの場合は、メニューから「分布－連続分布－カイ２乗分布－カイ２乗分布の確率...」を選び、カイ二乗値と自由度を入力し、上側確率を指定すれば、（５）のような<u>ある文法に則った入力をしなくても、（５）と全く同じ結果を得ることができる</u>。

なお、ほかにも多様な統計処理ができるとともに、表計算ソフトのデータをクリップボードやファイルを通して取り込み処理することができるようになっており、表計算ソフトとの親和性も高い。

（２）College Analysis

福山平成大学の福井正康氏による「社会システム分析プログラム」という統計分析等のできるものである。インストール不要で、操作は直感的である。

例えば、表１のデータの場合は、予め表計算ソフトに縦に入力した回数のデータを、コピーしてきて「グリッドエディタ」の欄に貼り付け（欄が自動的に広がるので簡単に貼り付く）、メニューから「分析－基本統計－質的データの検定－適合度検定」を選び、変数選択ボタンで変数を選択し（このとき「Yates補正」のチェックをはずす）、１次元分割表ボタンを選択し、等確率ボタン、検定ボタンを押すと、次のような結果が出る。

適合度検定結果

データ数	60
分割数	6
指定比率	1/6,1/6,1/6,1/6,1/6,1/6
自由度	5
χ2統計値	8.4000
片側確率Ｐ	0.1355
有意水準 α	0.05

Ｐ≧ α より、指定比率と比べて差があるといえない。

出力結果は非常に分かりやすい。手順が長いように思われるかもしれないが、実際の操作はそうでもなく、かえって「これは使いやすい」という感触が得られるものである。

また、「分析－基本統計－分布と確率」を選び、カイ二乗値と自由度を入力して矢印を押せば、確率が出てくる。逆に確率と自由度を入力して逆向きの矢印を押せば、カイ二乗値が出てくる。これは、２の（４）や（６）のような考察の際に、非常に便利である。

（３）js-STAR,PSPP,HAD

R CommanderやCollege Analysisのほかにもいろいろある。js-STARはブラウザ上でも処理でき、多くのコマンドでRプログラムも出力するので、Rでjs-STARの結果を再確認することが可能である。表計算ソフトのデータを貼り付けることも簡単にできる。

PSPPは有名な統計処理ソフトSPSSに似ている。日本語で結果の表が出力されるので分かりやすい。

HADはEXCEL上で動作するので、EXCELをどうしても使いたいという場合には適している。

（４）表計算ソフトと紹介したオープンソース・ソフトウェアによる統計処理の主な相違点

表計算ソフトと違い、これらの統計処理に適したオープンソース・ソフトウェアは、データを貼り付けるなどして取り込んだ後は、EXCELのようにデータが何行何列の範囲にあるかということを意識せずに処理できる。データを範囲指定することは原則的にないだけではなく、関数の数式を何らかのセルに入力することもなく、さらに、出力範囲を指定することもない。ただ、出力結果は別の文書にコピーペーストして用いるところがEXCELとは異なる。

５　まとめ

生徒が60回サイコロを振ったときに出た目の確率が1/6とはほど遠い値になったときに、サイコロの目の出方が同様に確からしいかどうかについて、生徒に理論的に説明ができなくとも、「大学で学ぶような統計学を用いて処理・判断することが可能だ」という説明はできるであろう。

また、興味・関心の高い生徒には、もう一歩踏み込んで、「目の出方が同様に確からしくないサイコロは、サイコロを何回か振って出た目を集計して、確率1/6のときと比べてある計算(カイ二乗値のこと)を行い、計算結果が13より大きくなったら疑う価値はある」や、「逆に、その計算結果が0.8より小さくなったら、あまりにも1/6に近づきすぎで何かがおかしいと思う」ということを説明することもできる。

６　統計に関する学習の今後に向けて

学習指導要領の改訂に際して、初等中等教育において、統計に関する学習を充実させていくことが重

要であるとされている。今後とも、統計を指導する側が統計に関して研修を深めていった方がよいであろう。

また、統計の話題、今回のサイコロのような地味なもの以外にも、広げようと思えば、「視聴率は千人足らずの抽出調査でそれなりの精度の結果を出していること」とか、「選挙の当選確実はすぐに出せること」とか、世の中で役立つ実績が多々あることだけではなく、「統計を駆使する仕事は、医療、農業、工業、商業、金融経済をはじめ、実に多々あること」など事欠かない。某食品会社では、北海道のジャガイモ畑の種芋は17cmの深さに植えるのが一番いいという結果をデータ分析して明らかにしていることなど、話題は探せば身近にもいろいろあるので、そういった情報を集めることも有効である。

小中学校の学習指導要領が改訂になり、小学校ではドットプロットを指導することとなるとともに、移行措置により、現在高等学校で指導している四分位範囲及び箱ひげ図が中学校で指導され、中学校からは中央値や最頻値が小学校に移ることとなった。高等学校のデータ分析には新たに何が入ってくるのか、あるいは教科情報に統計の内容が何か入ってくるのか。我々は、今後も、世の中の動きに敏感になりつつ、国立情報学研究所の新井紀子教授がいう「数学」「確率」「統計」の３つの言葉、これをうまく用いて生徒にこれらの有用性を伝えていく必要があるのではないだろうか。

7　χ^2についての補足

統計量χ^2の確率密度関数は次のとおりである。

$$f_n(y) = \frac{1}{2^{-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} \quad (0 < y < \infty)$$

参考文献等

GNU PSPP https://www.gnu.org/software/pspp/（2017-8-2 アクセス）

緒賀郷志 (2010).Ｒによる心理・調査データ解析.東京図書.69

大澤清二 (2011). 生活の統計学.建帛社.133-134

カイ２乗分布（χ2 分布）http://www.geisya.or.jp/~mwm48961/statistics/kai2.htm (2017-8-1 アクセス)

清水裕士 統計分析ソフト HAD http://norimune.net/had（2017-8-2 アクセス）

中央教育審議会（2016年12月）. 幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申）http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo0/toushin/1380731.htm（2017-8-2 アクセス）

日本数学会（1980).岩波数学辞典 第２版.岩波書店.287

中野博幸・田中敏（2011). フリーソフト js-STAR でかんたん統計データ分析.技術評論社

福井正康 社会システム分析プログラム College Analysis http://www.heisei-u.ac.jp/ba/fukui/analysis.html（2017-8-2 アクセス）

舟尾暢男（2008).「R」Commander ハンドブック.オーム社

森田優三 (1993).新統計概論 改訂版.日本評論社.240-242, 323-326

守谷栄一 (1974).詳解演習 数理統計.日本理工出版会.141-142, 215-216