整数教材としての Euclid 互除法と連分数について

林　　雄 一 郎

１　はじめに

久しぶりに高校数学「数学Ａ」に導入された Euclid の互除法は人類最古のアルゴリズムであり、B.C.300 年頃に記された Euclid の原論第７巻命題１に記載されている。ギリシャ数学はバビロニア数学のように代数が発達していなかったから図形の辺の長さで表されている。この互除法は連分数の考え方と同じであり、また数の連分数展開から無理数への理解が一層深まるのである。

本稿では、Euclid の互除法と不定方程式、連分数と関連する幾つかのトピックスを紹介し、「整数の性質」の単元にかかわる整数論の話題を提供し、高校数学における発展的な整数教材について考察する。

２　Euclid の互除法について

公約数の考えは小学校５年生から学ぶ。例えば、横 24ｃｍ、縦 18ｃｍの長方形の厚紙がある。これを余り屑が出ないように、しかも出来るだけ大きな正方形に分けるとき、何センチメートルの正方形にすればいいか？という問題を考えるとき最大公約数の考えに自然に導かれるだろう。

ところで、例えば 527 と 1147 の最大公約数を求めたいとする。児童らはこの２つの数の約数を調べ挙げるため素因数分解をしようとするだろう。奇素数$3,5,7,11,13,17$ で次々に割ってゆき、$527=31\times17$ を見つける。$\sqrt{527}=22.956\cdots$ だから19 までで見つかるはずである。

次に、1147 を17 または31で割って$1147=31\times37$ を得る。さらに、37 と17に公約数があるか否かチェックする。

$\sqrt{17}=4.123\cdots$ だから奇素数3で$17,37$ を割り、公約数は1 しかないことを知り、31が最大公約数であると判断するだろう。

以上の操作で必要な割り算の回数は、合計$6+2+2=10$回 となる。

一方、Euclid の互除法を使った場合は

$$
\begin{aligned}
1147&=2\times527+93\\
527&=5\times93+62\\
93&=1\times62+31\\
62&=2\times31
\end{aligned}
$$

計４回の割り算で済み、互除法の効率の良さを納得することになる。

整数a,bの最大公約数$\gcd(a,b)$ を求める Euclid の互除法は次のようなアルゴリズムの形式で表される（Knuth,1972)。

二つの整数$a,b\,(a>b)$に対して

E1.aをbで割り、余り$r\,(0\le r<b)$とする

E2.$r=0$ならば終了し、$b=\gcd(a,b)$

　　$r\ne0$ ならば E3.に行く

E3.代入操作$a\leftarrow b,b\leftarrow r$　E1.に戻る

2-1　E1～E3 の各操作では常に最大公約数が保存される。

$$\gcd(a,b)=\gcd(b,r)$$

（証）$\gcd(a,b)=d$　とおき、

$a=da', b=db'$　a',b' は互いに素とする。このとき a,b の任意の公約数 $s(\neq 1)$ は d の約数になる。もし d の約数でなければ a',b' の公約数となり矛盾する。E1 の操作で商を q とすれば、d は $b, a-bq=r$ の約数だから $\gcd(b,r)$ の約数である。

一方、$\gcd(b,r)$ は b,r の約数だから、$bq+r=a,b$　の公約数となり、d の約数である。

具体的な数で互除法を実行してみる。

例１　1147,1071 の最大公約数を求める。

互除法の操作は次の５回になる。

$$\begin{aligned}
&1147=1\times 1071+76\\
&1071=14\times 76+7\\
&76=10\times 7+6\\
&7=1\times 6+1\\
&6=6\times 1
\end{aligned}$$

$$\therefore \gcd(1147,1071)=1$$

このとき次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\gcd(1147,1071)=\gcd(1071,76)\\
&=\gcd(76,7)=\gcd(7,6)=1
\end{aligned}$$

以上を一般的に表現する。整数 a,b を考え、$\dfrac{a}{b}$ は有理数とする。a を b で割り、商を k_0 余りを x_2 とおく。　$a=x_0, b=x_1$ とする。以下、互除法の操作 E1～E3 を続ける。

$x_1>x_2>\cdots\geq 0$　だから、この操作は m 回で終了し、アルゴリズムは停止する。

$$\begin{aligned}
a=x_0&=k_0x_1+x_2 && 0<x_2<x_1\\
b=x_1&=k_1x_2+x_3 && 0<x_3<x_2\\
x_2&=k_2x_3+x_4 && 0<x_4<x_3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_{m-2}&=k_{m-2}x_{m-1}+x_m && 0<x_m<x_{m-1}\\
x_{m-1}&=k_{m-1}x_m && x_{m+1}=0
\end{aligned}$$

$$\gcd(x_{i-1},x_i)=\gcd(x_i,x_{i+1})$$

$$i=1,2,\cdots,m-1\quad x_m=\gcd(a,b)$$

以上を例１の場合で確認してみる。

割る数、割られる数の系列 $\{x_i\}$　は

$$[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]=[1147,1071,76,7,6,1]$$

商となる数の系列 $\{k_j\}$　は

$$[k_0,k_1,k_2,k_3,k_4]=[1,14,10,1,6]$$

これらの数の生成にはどういうカラクリが潜んでいるだろうか？という疑問が湧いてくるだろう。それを考察してみる。

2-2　　まず a,b を x_i $(i=2,3,\cdots m)$　で表わすことを考える。

$$
\begin{aligned}
a &= x_0 \\
&= k_0 x_1 + x_2 \\
&= k_0\left(k_1 x_2 + x_3\right) + x_2 = \left(1 + k_0 k_1\right) x_2 + k_0 x_3 \\
&= \left(1 + k_0 k_1\right)\left(k_2 x_3 + x_4\right) + k_0 x_3 \\
&= \left(k_0 + k_2 + k_0 k_1 k_2\right) x_3 + \left(1 + k_0 k_1\right) x_4 = \cdots
\end{aligned}
$$

各段階の x_n の係数を p_n とおく。

$$
p_0 = 1, p_1 = k_0
$$
$$
p_2 = 1 + k_0 k_1 = p_1 k_1 + p_0
$$

$$
\begin{aligned}
p_3 &= k_0 + k_2 + k_0 k_1 k_2 \\
&= \left(1 + k_0 k_1\right) k_2 + k_0 = p_2 k_2 + p_1
\end{aligned}
$$

・・・・

$\left\{p_n\right\}$ は次の漸化式を満たす。

$$
p_n = p_{n-1} k_{n-1} + p_{n-2}
$$

これを用いると

$$
a = x_0 = p_n x_n + p_{n-1} x_{n+1} \quad ・・・①
$$

と予想できる。

また、

$$
\begin{aligned}
b &= x_1 = k_1 x_2 + x_3 \\
&= k_1\left(k_2 x_3 + x_4\right) + x_3 \\
&= \left(1 + k_1 k_2\right) x_3 + k_1 x_4 = \cdots
\end{aligned}
$$

各段階の x_n の係数を q_n とおく。

$$
q_0 = 0, q_1 = 1,
$$
$$
q_2 = k_1 = q_1 k_1 + q_0
$$
$$
q_3 = k_1 k_2 + 1 = q_2 k_2 + q_1
$$

・・・・

$\left\{q_n\right\}$ は次の漸化式を満たす。

$$
q_n = q_{n-1} k_{n-1} + q_{n-2}
$$

これを用いると

$$
b = x_1 = q_n x_n + q_{n-1} x_{n+1} \quad ・・・②
$$

と予想できる。

①、②を数学的帰納法で証明する。

$n = 1$ のとき

$$
\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0 x_1 + x_2 \\ k_1 x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 x_1 + p_0 x_2 \\ q_2 x_2 + q_1 x_3 \end{pmatrix} \quad \text{となり}
$$

成り立つ。

$n - 1$ まで仮定して

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{n-1} x_n + x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(p_{n-1} k_{n-1} + p_{n-2}\right) x_n + p_{n-1} x_{n+1} \\ \left(q_{n-1} k_{n-1} + q_{n-2}\right) x_n + q_{n-1} x_{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p_n x_n + p_{n-1} x_{n+1} \\ q_n x_n + q_{n-1} x_{n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

よって、成り立つ。

なお、$n = m$ のとき $x_{m+1} = 0$ だから

$a = p_m x_m, b = q_m x_m$

例えば $a = 1147, b = 1071$ の場合、

$$
\begin{aligned}
& k_0 = 1, k_1 = 14, k_2 = 10, k_3 = 1, k_4 = 6 \\
& m = 5 \\
& p_0 = 1, p_1 = k_0 = 1 \\
& p_2 = p_1 k_1 + p_0 = 1 \times 14 + 1 = 15 \\
& p_3 = p_2 k_2 + p_1 = 15 \times 10 + 1 = 151 \\
& p_4 = p_3 k_3 + p_2 = 151 \times 1 + 15 = 166 \\
& p_5 = p_4 k_4 + p_3 = 166 \times 6 + 151 = 1147
\end{aligned}
$$

$$q_0=0, q_1=1, q_2=k_1=14$$
$$q_3=q_2k_2+q_1=14\times10+1=141$$
$$q_4=q_3k_3+q_2=141\times1+14=155$$
$$q_5=q_4k_4+q_3=155\times6+141=1071$$
$$1147=x_0=k_0x_1+x_2=1\times1071+76$$
$$1071=x_1=k_1x_2+x_3=14\times76+7$$
$$76=x_2=k_2x_3+x_4=10\times7+6$$
$$7=x_3=k_3x_4+x_5=1\times6+1$$
$$6=x_4=k_4x_5=6\times1$$

$$\gcd(x_0,x_1)=\gcd(1147,1071)$$
$$\gcd(x_1,x_2)=\gcd(1071,76)$$
$$\gcd(x_2,x_3)=\gcd(76,7)$$
$$\gcd(x_3,x_4)=\gcd(7,6)$$
$$\gcd(x_4,x_5)=\gcd(6,1)=1=x_5$$

2-3　$\{p_n\},\{q_n\}$ は次式を満たす。

$$\begin{vmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{vmatrix}=(-1)^n \quad \cdot\cdot\cdot ③$$

（証）

$n=1$ のとき、$p_1=k_0, p_0=q_1=1, q_0=0$

$$\therefore \begin{vmatrix} p_1 & p_0 \\ q_1 & q_0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} k_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1$$

$n-1$ のとき成り立つと仮定する。

$$\begin{vmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} p_{n-1}k_{n-1}+p_{n-2} & p_{n-1} \\ q_{n-1}k_{n-1}+q_{n-2} & q_{n-1} \end{vmatrix}$$
$$=k_{n-1}\begin{vmatrix} p_{n-1} & p_{n-1} \\ q_{n-1} & q_{n-1} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{vmatrix}=(-1)^n$$

2-4　x_n を a,b についての 1 次式で表す。

$n=1$ のとき

$-x_1=0\cdot x_0-1\cdot x_1$ から

$-x_1=q_0x_0-p_0x_1=q_0a-p_0b$

$n=2$ のとき、

$x_2=x_0-k_0x_1=q_1x_0-p_1x_1=q_1a-p_1b$

以上から、次式が予想される。

$$(-1)^n x_n=q_{n-1}a-p_{n-1}b$$

（証）

①、②を行列で表す。

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

逆行列をとって③を用いる。

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{(-1)^n}\begin{pmatrix} q_{n-1} & -p_{n-1} \\ -q_n & p_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
$$=(-1)^n\begin{pmatrix} q_{n-1}a-p_{n-1}b \\ -q_na+p_nb \end{pmatrix}$$

$$\therefore x_n=(-1)^n q_{n-1}a-(-1)^n p_{n-1}b \quad \cdot\cdot\cdot ④$$

2-5　Euclid の互除法の除算の回数は小さい方の数の 10 進数表示の桁数の 5 倍を超えない（*Lamė* の定理）。

これは数列 $x_0,x_1,\cdots x_m$ を Fibonacci 数列と比較することで証明できる。そのために補題を一つ必要とする。

補題　Fibonacci 数列 $\{f_k\}$ において

$f_{5p+1}>10^p$ が成り立つ。

例えば、

$$f_6=f_5+f_4=f_4+2f_3+f_2$$
$$=3f_3+2f_2=5f_2+3f_1$$
$$=8f_1+5f_0=13>10^1$$

（証）Fibonacci 数列の一般項は

$$f_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}\right\}$$

$$\alpha=\left(1+\sqrt{5}\right)/2,\beta=\left(1-\sqrt{5}\right)/2$$

これに$k=5p+1$ を代入

$$f_{5p+1}=\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left\{\alpha^5\right\}^p-\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left\{\beta^5\right\}^p$$

$$\alpha^5\approx 11.090\cdots>11 \qquad \beta^5\approx -0.090\cdots$$

よって、$f_{5p+1}\geq\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\cdot 11^p-\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

このとき右辺は10^p 以上となることが分かる。

まず、$p=0$ のときは明らか。
$p\geq 0$ のとき成り立つと仮定する。

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\cdot 11^{p+1}-\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$
$$=11\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\cdot 11^p-\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)+10\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$
$$\geq 11\cdot 10^p\geq 10^{p+1}$$

そこで、$\{x_i\}$ $i=0,1,2,\cdots m$ を逆順に

$\{l_j\}$ と定め、$\{f_j\}$ と比較する。

$$l_0=x_m\geq f_1=1$$
$$x_{m-1}>x_m,k_{m-1}>1 \text{ より}$$
$$l_1=x_{m-1}=k_{m-1}x_m\geq l_0+1\geq f_0+f_1=f_2$$
$$l_2=x_{m-2}=k_{m-2}x_{m-1}+x_m\geq l_1+l_0$$
$$\geq f_2+f_1=f_3$$

そこで、$l_j\geq f_{j+1}$ と仮定する。数学的帰納法で示す。

$$l_{j+1}=x_{m-j-1}=k_{m-j-1}x_{m-j}+x_{m-j+1}$$
$$\geq l_j+l_{j-1}\geq f_{j+1}+f_j=f_{j+2}$$

したがって、２つの整数$a,b\left(a>b\right)$ で

Euclid の互除法の回数mが
$m\geq 5q+1$ とする。このとき、

$$b=x_1=l_{m-1}\geq f_m\geq f_{5q+1}>10^q$$

$\therefore \log_{10}b>q$ が成り立つ。
この対偶は$\log_{10}b\leq q$ ならば、$m<5q$ となる。よって、互除法の回数は$5\lceil\log_{10}b\rceil$ で押さえられる。

ただし、$\lceil x\rceil$ はxを超える最小の整数であり、$x=\log_{10}b$ ならばbの 桁数を表す。

例 $\lceil\log_{10}1234\rceil=\lceil\log_{10}1.234+3\rceil=4$

3 Euclid 互除法と不定方程式

3-1 不定方程式 $ax+by=d$ ・・⑤
の一般解を考える。

⑤が解をもつためにはd が$\gcd\left(a,b\right)$

の倍数となることが必要十分である。

いま、$d=\gcd\left(a,b\right)$ とする。

Euclid の互除法を用いて **2-4** の④式が求められたとする。

$$x_m=d=\gcd\left(a,b\right)$$
$$=\left(-1\right)^m q_{m-1}a+\left(-1\right)^{m-1}p_{m-1}b$$

$a=a'd,b=b'd$ とおく。
この式と⑤から

$$a'\left(x-(-1)^m q_{m-1}\right)$$
$$=b'\left(-y+(-1)^{m-1} p_{m-1}\right)$$
a',b' は互いに素だから

$$x=(-1)^m q_{m-1}+b't$$

$$y=(-1)^{m-1} p_{m-1}-a't \quad ・・⑥$$

（t：整数）

これが⑤の一般解である。

例２　不定方程式　$1147x+1071y=1$ の一般解を求める。

$m=5, p_4=166, q_4=155$
$a'=1147, b'=1071$
を⑥に代入すれば
一般解は
$x=-155+1071t, y=166-1147t$

3-2　なお、次のように行列を使って特殊解を求める方法がある（岩堀、1983)。

$a=x_0=k_0x_1+x_2$ から

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

同様に $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$、・・・、

$\begin{pmatrix} x_{m-1} \\ x_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_{m-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_m \\ 0 \end{pmatrix}$ が成り立つ。

これから

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} k_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} k_{m-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_m \\ 0 \end{pmatrix} \quad ・$$
$$=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_m \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$$

・・⑦
とおくと
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

となり

$$\therefore d=ax+by$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} k_{m-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} k_{m-2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\cdots\begin{pmatrix} k_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -k_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -k_{m-2} \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -k_0 \end{pmatrix}$$

・・⑧
ここで

$$\begin{pmatrix} k_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}=-\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & k_i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -k_i \end{pmatrix}$$

⑧を用いて **2-1** の例１の特殊解を求める。
$k_0=1, k_1=14, k_2=10, k_3=1, k_4=6$

だから　⑧は

$$\begin{pmatrix} x & y \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}$$
$$\times\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -10 \\ -1 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -14 & 15 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 141 & -151 \\ -155 & 166 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -155 & 166 \\ * & * \end{pmatrix}$$

特殊解は$x=-155, y=166$である。

4　Euclid 互除法と連分数

4-1　Euclid 互除法の式から連分数展開が出てくる。

2-1 の例１の$1147, 1071$ の互除法の各式変形を再度記すと

$$1147 = 1\cdot 1071 + 76, 1071 = 14\cdot 76 + 7$$
$$76 = 10\cdot 7 + 6, 7 = 1\cdot 6 + 1$$

これを連分数に展開すると

$$\frac{1147}{1071} = 1 + \frac{76}{1071} = 1 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{7}{76}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{6}{7}}} = 1 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6}}}}$$

一般のa, b の場合は

$$\frac{a}{b} = \frac{x_0}{x_1} = k_0 + \frac{x_2}{x_1} = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{x_3}{x_2}}$$

$$= k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{x_4}{x_3}}} = \cdots$$

$$= k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cdots + \cfrac{1}{k_{m-2} + \cfrac{1}{k_{m-1}}}}}$$

$= [k_0, k_1, \cdots, k_{m-1}]$ と書く。

これは **2-1** で扱った互除法の商系列の表現と同じである。

上の例では　$\frac{1147}{1071} = [1, 14, 10, 1, 6]$

なお、有理数は有限の連分数展開で表される。逆も成り立つ。

無理数の連分数展開はどうなるか？

例えば、$\sqrt{2}$ を連分数展開は

$$\sqrt{2} = 1 + \left(\sqrt{2} - 1\right) = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \left(\sqrt{2} - 1\right)}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \sqrt{2}}} = [1, 2, 2, \cdots]$$

$$\cdots$$

となり、無限の連分数展開となる。

実は、任意の無理数は無限連分数に展開される。逆も成り立つ。

$\sqrt{2} = [1, 2, 2, \cdots] = [1, \dot{2}]$ ということは

$\sqrt{2}$ が無理数であることの証左である。

4-2 $\tau=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ の連分数展開を考える。

この数は黄金比と呼ばれ、 $\tau^2-\tau-1=0$ を満たす正の解である。式変形すると

$$\tau=1+\frac{1}{\tau}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\tau}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\tau}}}$$

$$=[1,1,\cdots]$$

黄金比は Fibonacci 数列の漸化式

$p_0=p_1=1$ $p_n=p_{n-1}+p_{n-2}$ を満たす数列$1,1,2,3,5,\cdots$に関連している。

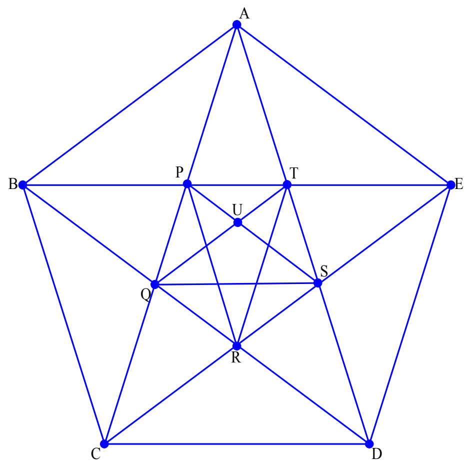
辺の長さ 1 の正五角形 ABCDE において、$\angle AEB=\dfrac{\pi}{5}$ 点 A から線分 BE に垂線を下した点を F とすれば

$$EF=\cos\frac{\pi}{5} \qquad BE=2\cos\frac{\pi}{5}$$

$AB=AE=1$ $\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{AB}{BP}$ より

$$BP=\frac{1}{BE}$$

$$BE=BP+PE=BP+AE=BP+1$$



$\therefore BE=1+\dfrac{1}{BE}$ ここで $BE=\tau$ とおけば $\tau=1+\dfrac{1}{\tau}$ となり BE の長さは黄金比になる。

$$BE=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

正五角形の作図はこの比を使ってできる。

次に、線分同士の互除法を考える。

$BE=AE\cdot 1+BP$

$AE=BT=BP\cdot 1+PT$

$BP=QT=PT\cdot 1+UT$

.....

これを連分数で表すと以下のような無限連分数になる。

$$\tau=\frac{BE}{AE}=BE=1+\frac{BP}{AE}=1+\frac{1}{\frac{AE}{BP}}$$

$$=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{BP}{PT}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{PT}{UT}}}}=\cdots$$

よって、τ は無理数となる。

参考文献

[1] 岩堀長慶：２次行列の世界、岩波書店

[2] 河田敬義(1992)：数論、岩波書店

[3] Knuth(1972)：The Art of Computer Programming,Volume I

[4] 根上生也(2012)：数学活用、啓林館

[5] 林　雄一郎(2012)：RSA 暗号と素因数分解、数実研第 81 回研究会

[6] 林　雄一郎(2014)：高校数学における発展的オプション教材の意義について、北海道情報大学紀要第 25 巻第 2 号