微分積分のよさを実感しよう！

―　惑星の運動法則を導く　―

林　雄一郎　　（北海道情報大）

1　はじめに

Ison 彗星が先日、太陽付近の近日点を通過した天体ショウは大きな話題となった。また、lovejoy 彗星が接近中である。Cinderella を用いて遊星の Kepler 運動を見ていると面積速度が太陽の引力で急に大きくなる。実に不思議な現象である。Newton（1642～1727）の歴史的な著作『Principia』（プリンキピア）3 巻の第 1 巻「物体の運動について」では向心力による運動として、Kepler（1571～1630）の面積速度法則、距離の 2 乗に反比例する向心力の場で物体の運動は円錐曲線になるなどが運動方程式と万有引力の法則から演繹的に導いている。これを可能にしたのが Apollonius の円錐曲線、Decartes の座標幾何、Newton・Leipnitz の微分積分などの数学言語であった。本稿では、２で Kepler の法則を、３でこれを Newton 力学から導く過程を確かめる。これは三角関数、ベクトル、円錐曲線、微分積分の応用の宝庫であり、特に微分積分のよさを実感できる教材になりうる。

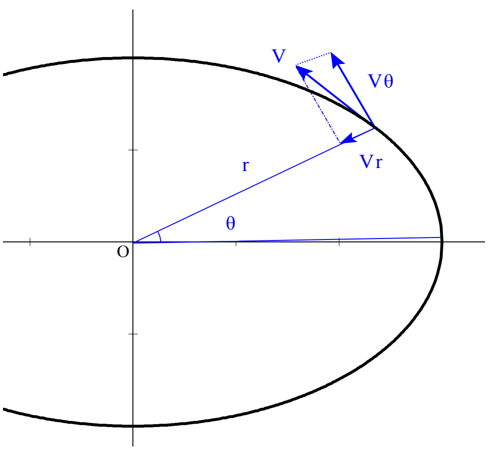
2　Kepler の法則

（１）　太陽を原点とする遊星の動径は等しい時間に等しい面積を描く。すなわち、太陽に対する遊星の面積速度は一定である。（面積速度一定の法則）

（２）　遊星の軌道は太陽を焦点とする楕円軌道となる。

（３）　遊星の公転周期の 2 乗は楕円軌道の長軸の 3 乗に比例する。

3　この法則を Newton 力学から導く



遊星の運動を右図のように極座標系で考え、速度Ｖをｒ、θ方向に分ける。

遊星の持つ運動エネルギー E　は

$$E=\frac{1}{2}mV^2$$

よって、全エネルギーはエネルギー保存則から

$$E+U=\frac{1}{2}mV^2-\frac{kMm}{r}=K=const.\cdot\cdot\cdot ①$$

$$V_r=\frac{dr}{dt}\qquad V_\theta=r\frac{d\theta}{dt}$$

$$E=\frac{1}{2}mV^2=\frac{1}{2}m\left(V_\theta{}^2+V_r{}^2\right)=\frac{1}{2}m\left\{r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}$$

したがって、①は $\frac{1}{2}m\left\{r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}-\frac{kMm}{r}=K$

$r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2-\frac{2\mu}{r}=c$ ・・・② ただし $\mu=kM$ $c=\frac{2K}{m}$

引力 F を動径およびこれと直角方向に分けた成分を F_r 、F_θ とする

$F_r=-k\frac{Mm}{r^2}=ma_r=m\left\{\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}$ $F_\theta=0=ma_\theta=m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$

これより $r^2\frac{d\theta}{dt}=const.=2h$

$h=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$ は面積速度であるから、Kepler の第一法則（１）が証明された。

動径 r を θ の関数と考える $\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{2h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$ これを②に代入

$\frac{4h^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2\left(\frac{2h}{r^2}\right)^2-\frac{2\mu}{r}=c$ $\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=\frac{r^2}{4h^2}\left(cr^2+2\mu r-4h^2\right)$ ・・・③

変数変換 $r=\frac{2h}{u}$ とする $\frac{dr}{d\theta}=\frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}=-\frac{2h}{u^2}\frac{du}{d\theta}$

これを③に代入

$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=\frac{r^2u^4}{16h^4}\left(cr^2+2\mu r-4h^2\right)=c+\frac{\mu u}{h}-u^2=-\left(u-\frac{\mu}{2h}\right)^2+c+\left(\frac{\mu}{2h}\right)^2$ ・・・④

$w=u-\frac{\mu}{2h}$ とおき、$c+\left(\frac{\mu}{2h}\right)^2=K^2$ とおくと④は $\frac{dw}{d\theta}=\pm\sqrt{K^2-w^2}$

これを積分する $\int\frac{dw}{\sqrt{K^2-w^2}}=\int d\theta=\theta+c'$ ・・・⑤

⑤の左辺は $w=K\cos t$ とおき置換積分 $-\int\frac{K\sin t}{K\sin t}dt=-t+c''$ $\therefore t=\pm\theta\pm c'+c''$

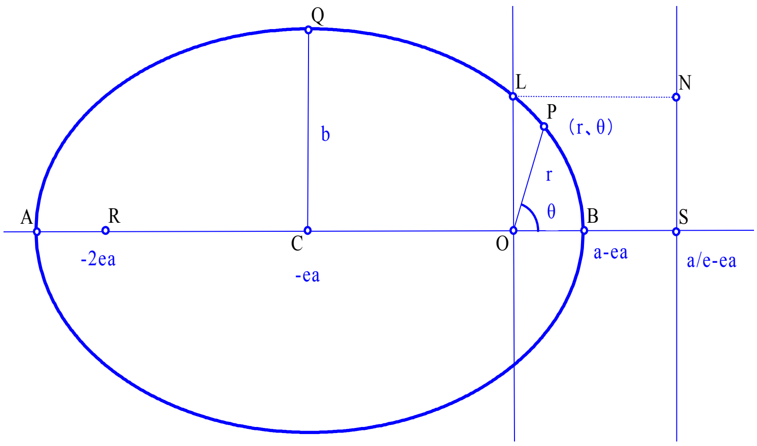
$$\therefore w = K\cos(\pm\theta \pm c' + c'') = K\cos(\theta - \alpha)$$ ただし、$\alpha = \pm c'' - c'$ （ 積分定数）

$$r = \frac{2h}{u} = \frac{2h}{\frac{\mu}{2h} + w} = \frac{2h}{\frac{\mu}{2h} + K\cos(\theta-\alpha)} = \frac{\frac{4h^2}{\mu}}{1 + \frac{2hK}{\mu}\cos(\theta-\alpha)}$$

$$l = \frac{4h^2}{\mu} \quad e = \frac{2hK}{\mu} = \frac{2h}{\mu}\sqrt{c + \left(\frac{\mu}{2h}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{4ch^2}{\mu^2}} \qquad \therefore r = \frac{l}{1 + e\cos(\theta-\alpha)} \quad \cdots ⑥$$

⑥式は半直絃の長さがl 、離心率eの原点を焦点とする２次曲線の極方程式となる。こうして、Kepler の第二法則（２）が証明されたことになる。

特に、$0 < e < 1$ の場合は、原点を焦点とした楕円となり、太陽の周回軌道となる。



長軸、短軸の長さを$2a, 2b$ とし、点 C は楕円の中心、焦点の一つを原点 O とする。

楕円上の点 P は遊星とし、極座標は(r,θ) 、点 L も楕円上の点で$LO \perp BO$ 、半直絃

$LO = l$ 、線分NS は準線である。遊星の太陽を回る周期を T とすると面積速度がhだからTh は楕円の面積となる。$Th = \pi ab$

また、$2a = OA + OB = \frac{l}{1 + e\cos(-\pi)} + \frac{1}{1 + e\cos 0} = \frac{l}{1-e} + \frac{l}{1+e} \qquad \therefore l = a(1-e^2)$

あるいは、 $\frac{LO}{LN} = e$ だから $LO = l = eLN = e\left(\frac{a}{e} - ea\right) = a(1-e^2)$

他方、$\frac{(x+ea)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点$L(0,l)$を代入 $\frac{(ea)^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} = 1 \quad l^2 = b^2(1-e^2)$

$l = b\sqrt{1-e^2} = a\left(1-e^2\right)$　　$\therefore b = a\sqrt{1-e^2}$　　また、$4h^2 = \mu l = \mu a\left(1-e^2\right)$

したがって、$T^2 = \left(\dfrac{\pi ab}{h}\right)^2 = \dfrac{4}{\mu a\left(1-e^2\right)} \cdot \pi^2 a^2 \cdot a^2\left(1-e^2\right) = \dfrac{4\pi^2 a^3}{\mu} = \dfrac{4\pi^2}{kM} \cdot a^3$

こうして、遊星の太陽の周囲を回る周期の二乗は軌道の長軸の３乗に比例するという Kepler の第三法則（３）が得られる。

なお、lson 彗星の離心率は 1.0000026±0.0000002 で双曲線に近く、また lovejoy 彗星は 0.9982394 で放物線に近い。つまり、今後は宇宙のかなたに飛び去り二度と戻ってこない星々である。

（資　料）

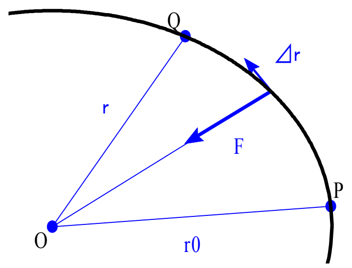
4　物理学からの準備

4-1　万有引力の法則

２つの質点間にはこれらの質量の積に比例し、距離の２乗に反比例する引力が、これらを結ぶ直線に沿って働く。２つの質量を M, m とし、距離を r とすれば引力 F は

$F = k\dfrac{Mm}{r^2}$　　　$k = 6.670 \times 10^{-8}$ [dyne・cm²/gr²]（万有引力の定数）

4-2　万有引力のポテンシャル



太陽 O（質量 M ）の引力圏で遊星（質量 m）が曲線に沿って移動する場合を考える。遊星が変位 Δr だけ動いたとき、引力 F のする仕事 ΔW は

$\Delta W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\Delta r}$　（内積）

点 P から点 Q に移動するまでの仕事 W は

$$W = \int_{r_0}^{r} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{r_0}^{r} -\frac{kMm}{r^2} dr = kMm\left[\frac{1}{r}\right]_{r_0}^{r} = kMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

点 P の位置を無限遠に選ぶと $r_0 = \infty$ となり　$W = kMm / r$

点 Q にある遊星がもつ位置エネルギー U は $U = -\dfrac{kMm}{r}$ （無限遠点が 0）となる。

4-3　速度、加速度の極座標での表示

動点 P の速度を直角座標、極座標に分けて表示する。

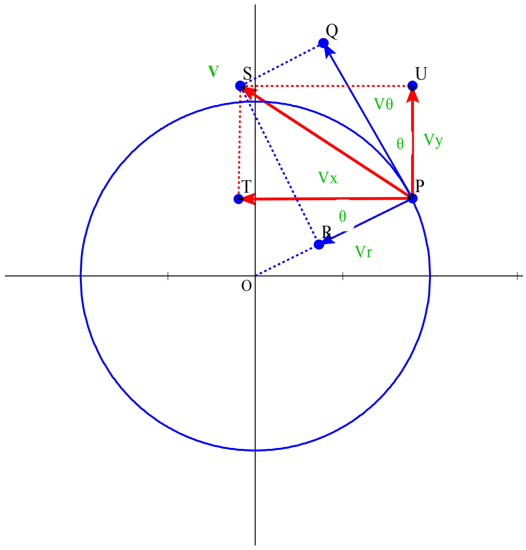
$$V_r = V_x \cos\theta + V_y \sin\theta$$

$$V_\theta = -V_x \sin\theta + V_y \cos\theta$$

他方、 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ より

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$



$$V_r = \left(\frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\cos\theta + \sin\theta\left(\frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$= \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt}$$

$$V_\theta = -\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right) + \cos\theta\left(\frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right) = r\frac{d\theta}{dt}$$

加速度の表示は動径方向とその直角成分を a_r, a_θ 、直角座標成分を a_x, a_y とおくと

$$a_r = a_x \cos\theta + a_y \sin\theta \quad , \quad a_\theta = -a_x \sin\theta + a_y \cos\theta$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt}\cos\theta - \sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - \sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$= \left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}\cos\theta - \left\{r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right\}\sin\theta$$

$$a_y = \frac{d^2r}{dt^2}\sin\theta + \cos\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \cos\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$
=\left\{\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}\sin\theta+\left\{r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right\}\cos\theta
$$

以上からよく使われる次の加速度の式が出てくる。

$$
a_r=\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2
$$

$$
a_\theta=r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{r}\left(r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}+2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)
$$

参考文献

奥田毅・真室哲雄：基礎物理学（上巻）、内田老鶴圃、昭和 36 年（第 2 版）

山内恭彦：一般力学、岩波書店