ある線型連立方程式とフロベニウス根について

林　　雄　一　郎　（北海道情報大学）

1　ある線型連立方程式とその解

ここで紹介する或る線型連立方程式は非負行列に関するフロベニウスの定理に係わるもので、数理経済学や確率論で近年応用されることが多い。

次のような問題を高校生に出したらどういう解き方をするだろうか。

> **問題 1**
>
> x,y を未知数とし、パラメータ λ を含む二元連立一次方程式
>
> $(\lambda-2)x-3y=0$ ・・① $-4x+(\lambda-3)y=0$ ・・② において、
>
> パラメータ $\lambda\ge 0$ に対応する解で、$x\ge 0$ $y\ge 0$ かつ $x+y>0$ を満たすものを求めよ。

（解）まず未知数の消去を考えるだろう。例えば y を消去する

①から $(\lambda-2)(\lambda-3)x-3(\lambda-3)y=0$ 　②から $12x-3(\lambda-3)y=0$ 辺々引いて

$\{(\lambda-2)(\lambda-3)-12\}x=0$ 　同様にして x を消去すると $\{(\lambda-2)(\lambda-3)-12\}y=0$

条件を使うためにこれらを加えて $\{(\lambda-2)(\lambda-3)-12\}(x+y)=0$ 　$x+y>0$ より

$(\lambda-2)(\lambda-3)-12=0$ $\lambda^2-5\lambda-6=0$ 　$\lambda=6,-1$

$\lambda\ge 0$ $\therefore\lambda=6$ 　　$x=\dfrac{3}{\lambda-2}=\dfrac{3}{4}y$ 　$y=1$ とすれば $x=\dfrac{3}{4}$

これは符号条件を満たす特殊解である

よって、一般解は $(x,y)=(3t,4t)$ t; 正の実数 ・・・(答え)

なお、$\lambda\ge 0$ より $\lambda=-1$ は考えないが ①から $x=-y$ となり条件に適さない

この問題のルーツは何か？

① ②を行列表現してみる。 $A=\begin{pmatrix}2&3\\4&3\end{pmatrix}$ とおくと、与えられた連立方程式は

$A\vec{x}=\lambda\vec{x}$ となる。 $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ λ は固有多項式$|A-\lambda E|=\lambda^2-5\lambda-6$の根であり

行列A の固有値である。 $\vec{x}$ は固有値λに属する Aの固有ベクトルである

この問題から非負行列Aの最大の固有値に属する非負固有ベクトルが存在することが分かる。最大根$\lambda=6$ は行列A のフロベニウス根と呼ばれる。

2 フロベニウスの定理

1で述べたことから一般的に2次正方行列に対して次の定理が予想できる。

$A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ を$a\geq 0,b\geq 0,c\geq 0,d\geq 0$ を満たす非負行列とする。このとき、

λ がA の最大固有値ならば、λ に属する固有ベクトル$\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ で$x\geq 0,y\geq 0$ かつ

$x+y>0$ を満たすものが存在する。λ を、Aのフロベニウス（Frobenius）根という。

＜証　明＞

$A\vec{x}=\lambda\vec{x}$ を連立方程式で表す

$(\lambda-a)x-by=0$ ・・① $-cx+(\lambda-d)y=0$ ・・②

このとき1で解いたようにして $(\lambda-a)(\lambda-d)-bc=0$ ・・③

③の判別式は $(a+d)^2-4(ad-bc)=(a-d)^2+4bc\geq 0$ よって、実数解をもつ

2根の和$=a+d\geq 0$ より正の根が少なくとも一つはある。

フロベニウス根をλ とおく $\lambda-a\geq 0$ 、$\lambda-d\geq 0$ ・・・④ が成り立つ

これは次のことから分かる

$$\lambda=\frac{a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}$$ であるから

$$\lambda\geq\frac{a+d+\sqrt{(a-d)^2}}{2}=\frac{a+d+|a-d|}{2}=\frac{a+d+\max(a,d)-\min(a,d)}{2}$$

$=\max(a,d)$

あるいは、λ が最大根だから$2\lambda > a+d$ ③から$\lambda-a$ と$\lambda-d$ は同符号かいずれかが0である。もし、共に負ならば$2\lambda < a+d$ となり矛盾する。また、いずれかが0ならば$\lambda=a$ もしくは$\lambda=d$　どちらにしても③の根の和は$a+d$ だから④がいえる。

次に、このλのとき、①、②の解が符号条件を満たすことを示す

２つのケースに分けて考える

1）$\max(\lambda-a,\lambda-d)>0$ のとき　$\lambda-a>0$ と仮定すると③から$\lambda-d>0$

$(x,y)=\left(\dfrac{b}{\lambda-a},1\right)$　は$x\geq 0, y>0$ かつ$x+y>0$ だから符号条件を満たす。

さらに①の方程式を満足する。また、以下のように②の方程式を満足することが分かる

②から　$(\lambda-a)(-cx+(\lambda-d)y)=-c(\lambda-a)x+(\lambda-a)(\lambda-d)y$

$=-c(\lambda-a)x+bcy=-c((\lambda-a)x-by)=0$　$\lambda-a>0$ より$-cx+(\lambda-d)y=0$

2）$\max(\lambda-a,\lambda-d)=0$ のとき、④から$\lambda-a=0$ かつ$\lambda-d=0$　このとき$bc=0$

$b=0, c>0$　ならば　①、②より$x=0$　y は任意正数、$c=0, b>0$ ならば$y=0$ 、x は任意正数　$b=c=0$ ならばx,y は任意正数が解となる。いずれの場合も符号条件を満たす。

3　非斉次方程式の場合

問題１の方程式を非斉次にした問題を考える。

> 問題２　次の方程式が非負解をもつためのξ の満たす条件を求めよ。
>
> $(\xi-2)x-3y=5$　・・①　　$-4x+(\xi-3)y=6$　・・②

＜解＞

①$\times(\xi-3)$ ＋②×４　を作りy を消去する

$(\xi-2)(\xi-3)x-4(\xi-3)y=5(\xi-3)$　　$-12x+4(\xi-3)y=24$

辺々加えて

$$\{(\xi-2)(\xi-3)-12\}x=5(\xi-3)+24=5\xi+9$$

問題１のフロベニウス根$\lambda=6$ に対して、$\xi>\lambda$ となると仮定すれば

$(\xi-2)(\xi-3)>(\lambda-2)(\lambda-3)>0$ が成り立つから

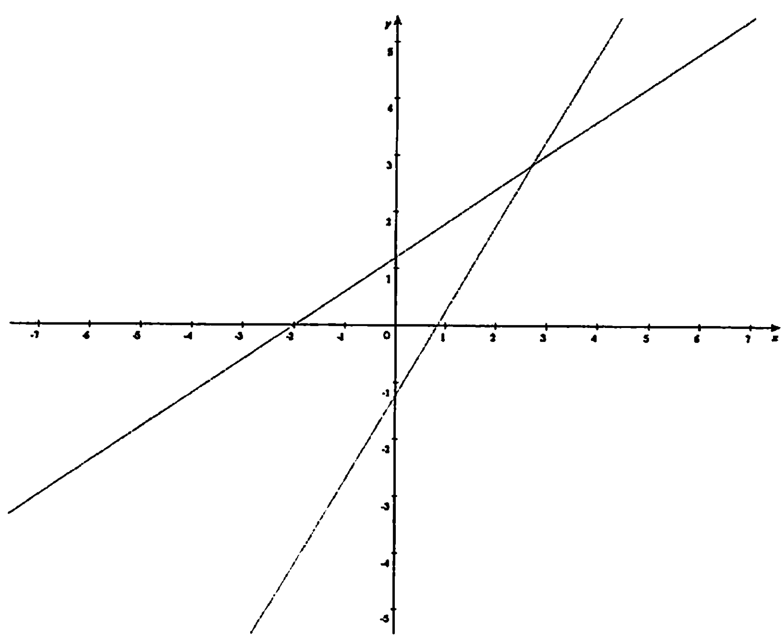
$$\Delta(\xi)=(\xi-2)(\xi-3)-12>(\lambda-2)(\lambda-3)-12=\Delta(\lambda)=0 \qquad \therefore \Delta(\xi)>0$$

この条件のもとで解を計算すると

$$\Delta(\xi)x=5\xi+9 \qquad x=\frac{5\xi+9}{\Delta(\xi)}>0 \text{ 同様にして } y=\frac{6\xi+8}{\Delta(\xi)}>0$$

したがって、$\xi>\lambda$ ならば非負解をもつことが分かる

① 、②のグラフを描きξ の値を変化させていくと６を越えると第１象限で交点を持つことが分かる



$\xi=8>\lambda=6$ の場合のグラフ

参考文献

二階堂副包：経済のための線型数学、培風館、昭和４６年