アルベロス図形と算額図形の数理

林　　雄　一　郎*

1　はじめに

昨年秋、大学時代の友人から面白い問題を考えたので大学の講義の折にでも使ってくれという手紙に添えてレポートが届いた。彼は東京都立高校で長らく教職に就く傍らＮＨＫのラジオ・ＴＶ講座、教科書執筆（啓林館）を手掛けた異才な人物である。テーマは「複素数と直線と円そして、アルベロスからシュタイナー円鎖へ」[1]というもので、内容は、複素数平面上で直線や円、１次分数変換、反転を説明し、アルベロスやパップスの円環定理、シュタイナーの円鎖定理を扱った、たいそう面白いものであった。また、和算ではこの種の円に関する幾何図形を多く扱っており、算額として神社に奉納されている。本稿では、アルベロス図形と或る算額問題に潜む数理を紹介する。

2　アルベロス図形

「アルベロス」とは“靴屋のナイフ（leather-worker's knife)”という意味である。

写真は次の資料である。

REVIVAL OF GEOMETORY:
PAPPUS OF ALEXANDRIA
(p.578)

SELECTIONS ILLUSTRATING
THE HISTORY OF GREEK
MATHEMATICS TRANSRATED
BY IVOR THOMAS
In Two Volumes II
FROM ARISTARCHUS TO
PAPPUS
HARVARD UNIVERSITY PRESS
1941
原文はギリシャ語でありその英訳
である。

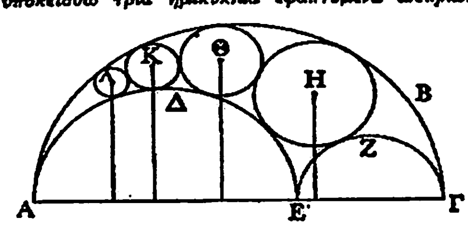
GREEK MATHEMATICS

τῆς AB καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς AB, ΔΘ), ἀλλὰ τὸ ΛΛΒΘ τῷ ΛΛΚΝ ἴσον ἐστίν (ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν τῆς ΛΛ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΛΛ, ΘΚ), καὶ τὸ ΑΔΕΒ ἄρα τῷ ΛΛΚΝ ἴσον ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ τὸ ΒΗΖΓ τῷ ΝΚΓΜ ἴσον ἐστίν· τὰ ἄρα ΔΑΒΕ, ΒΗΖΓ παραλληλόγραμμα τῷ ΛΛΓΜ ἴσα ἐστίν, τουτέστιν τῷ ὑπὸ ΑΓ, ΘΒ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΛΑΓ, ἥ ἐστιν ἴση συναμφοτέραις ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΒΘΔ. καὶ ἔστι τοῦτο καθολικώτερον πολλῷ τοῦ ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις ἐπὶ τῶν τετραγώνων ἐν τοῖς Στοιχείοις δεδειγμένου.

(g) Circles Inscribed in the ἄρβηλος

Ibid. iv. 14. 19, ed. Hultsch 208. 9-21

Φέρεται ἔν τισιν ἀρχαία πρότασις τοιαύτη· ὑποκείσθω τρία ἡμικύκλια ἐφαπτόμενα ἀλλήλων



τὰ ΑΒΓ, ΑΔΕ, ΕΖΓ, καὶ εἰς τὸ μεταξὺ τῶν περιφερειῶν αὐτῶν χωρίον, ὃ δὴ καλοῦσιν ἄρβηλον,

578

＊北海道情報大

“アルベロスの問題”とは

「中心HからΑΓへの垂線はHについての円の直径に等しく、θからの垂線はθについての円の直径の2倍に等しく、Kからの垂線は3倍に等しい。残りの垂線は、限りなく生ずる円の内接によって単一に増加する円列の順番に従って、順序正しくそれと同数倍の適当な円の直径に等しい」(同上論文 p.581)

作図してみると以下の図1のようになる。垂線の長さは円C1の場合は直径と同じ、円C2の場合は円C2の直径の2倍、円C3の場合は直径の3倍、・・・となる。

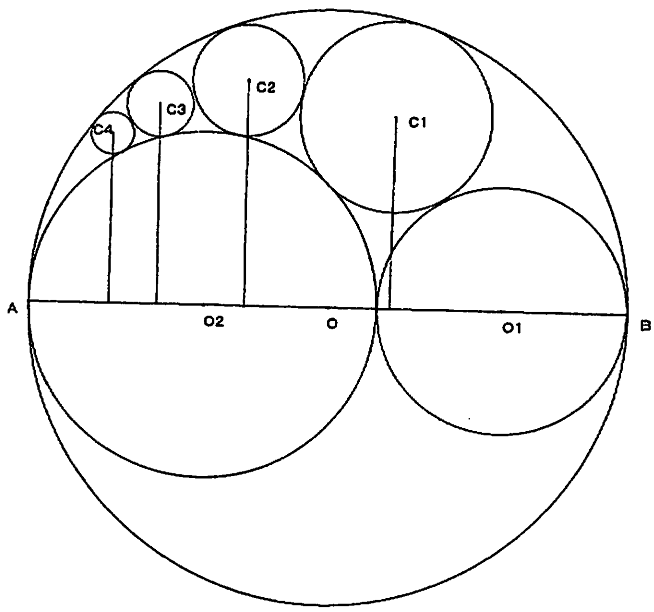


図1　アルベロス図形

この命題が成り立つことは反転を用いると簡単に証明できる。

図2で、大円Aは反転円で、小円O及びO2は反転円の中心Aを通るように配置する。反転円の中心を通る円はABに垂直な直線に写像されるから、小円O，O2の反転像はそれぞれ直線L1、L2になる。

アルベロスの内接円群O1，C1，C2，・・・は小円O及びO2に挟まれた領域内にあり、それらの反転像は直線L1，L2に挟まれた領域内に写像され、それぞれ等円O1´、C1´、C2´、・・・になる。その根拠は、反転円の内部にある円で反転円の中心を内部に含まない円は、反転円の外部の円に写像されるからである。

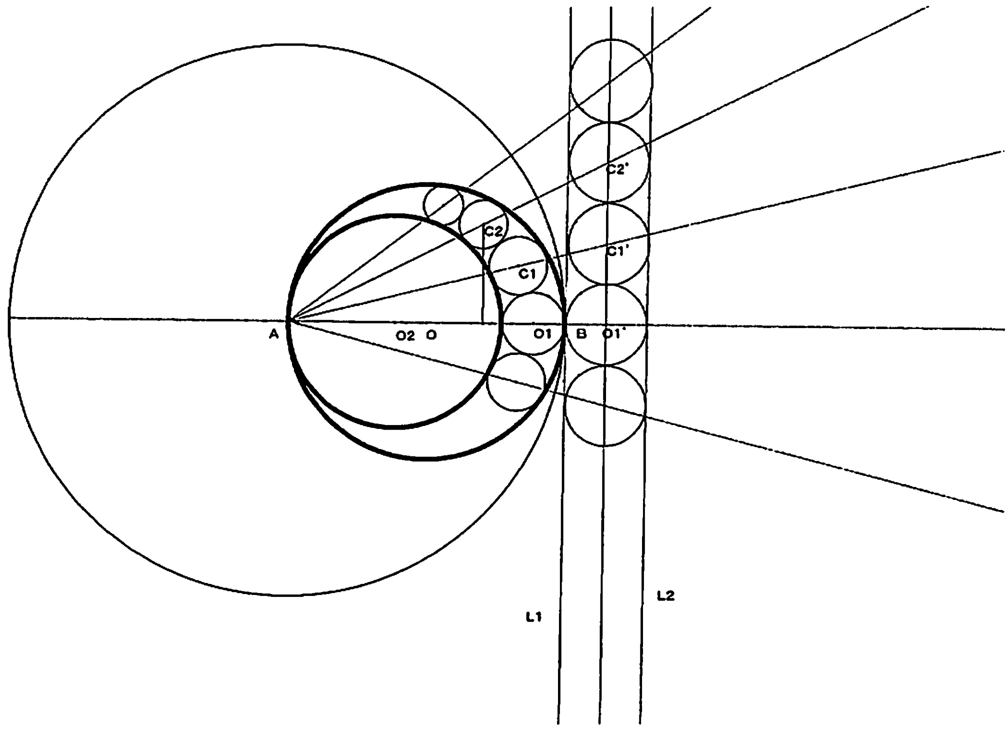


図２　元の図形を反転した図形

図から、例えば円Ｃ２と円Ｃ２´は点Ａを中心とした相似の位置にある。
線分Ｃ２´Ｏ１´の長さは等円の直径の２倍である。したがって、円Ｃ２から線分ＡＢに下した垂線の長さは円Ｃ２の直径の２倍となる。他の内接円についても同様に証明できる。

以上の議論のうち反転図形については、複素数平面上で確かめることもできる。
図２で点Ａを原点とし、直線ＡＢを実数軸、点Ａで垂線を立てそれを虚数軸とする。
例えば、大円Ａ、円Ｏ、円Ｏ２をそれぞれ$|z|=6$、$|z-3|=3$、$|z-2|=2$ とすると
反転の中心が原点だから、反転は$w=36/\overline{z}$　・・・①　で与えられる。
円Ｏを①で変換すると　$\left|\dfrac{36}{\overline{w}}-3\right|=3$　簡約すると$w+\overline{w}=12$　$w=x+yi$　とおけば
$x=6$　これが直線Ｌ１である。同様に、円Ｏ２は$x=9$　これが直線Ｌ２である。
内接円Ｏ１は、$|z-5|=1$　これを①で変換すると　$(36-5w)(36-5\overline{w})=w\overline{w}$

$x^2+y^2-15x+54=0$　$\left(x-\dfrac{15}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$　中心$\left(\dfrac{15}{2},0\right)$　半径$\dfrac{3}{2}$　の円Ｏ１´となる。

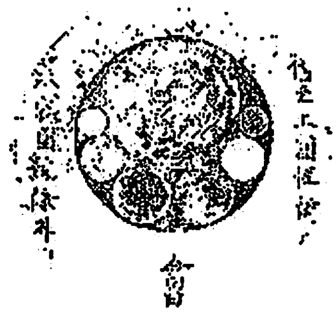
3　算額の問題[2]

右図の問題は川越八幡神社にある算額である。問題は以下の通りである。

今有如図円内容源円及累円　及不動寄隅仮画六切

其外円径若干間随容円数得至止円径術如何

答日如左術術日以容円数除外円径得至火止円径合間



「川越の算額と和算家企画展」抜粋

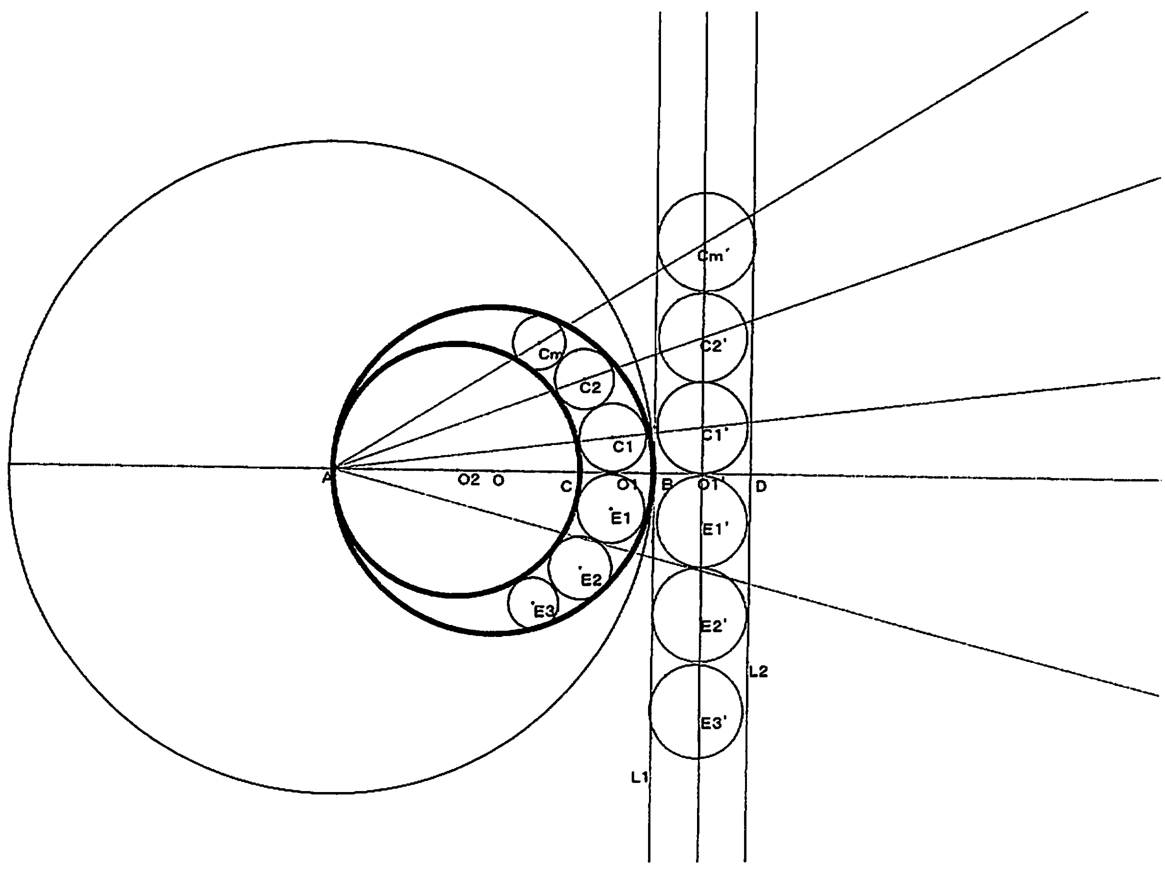
川越市立博物館

現代語訳

「今図の如く外円に源円を内接させ両円に接し、互いに接する累円を入れる。仮に六個を画く。外円径を与えたとき、止円径の最大を容円数に従って求める方法を問う」

「答に曰く左術の如し。術に曰く容円数を以て外円径を除すれば至大止円径を得て間に合す」　すなわち　止円径の最大値＝　外円径÷容円数

下図で考える。外円を円O、源円を円O2、累円をO１，C１，C２，・・とする。反転円をアルベロス図形と同じように円Ａとする。



累円数を$n=2m$とおく。 外円と源円との接点Ａを通る両円の直径をＡＢ、ＡＣとする。ＡＢ＝a、ＡＣ＝t とおくと$0<t<a$ 累円の中心を$C_1,C_2,C_3,\cdots;E_1,E_2,E_3,\cdots$ とし、止円をC_m,E_mとする。これらを反転円Ａで反転して得た円を$C1',C2',\cdots,C_m';E1',E2',\cdots,E_m'$ とする。C_i',E_i' の半径をR とする。$AC\cdot AD=a^2$ より$AD=\dfrac{a^2}{t}=a+2R$ 　これより

$R=\dfrac{a^2}{2}\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{a}\right)$ 　$O1'$ を線分ＢＤの中点とすると、$AO1'=a+R$ 、$C_m'O1'=(2m-1)R$

また、止円C_m の半径をr とおく。止円C_m と反転円C_m' は相似の位置にあるから$AC_m:AC_m'=r:R$ 　他方、点Cmを反転した点をNとおく。また、点P を反転した点をP' とし、直線APが止円Cm の接線ならば点P' は反転円Cm' の接点である。

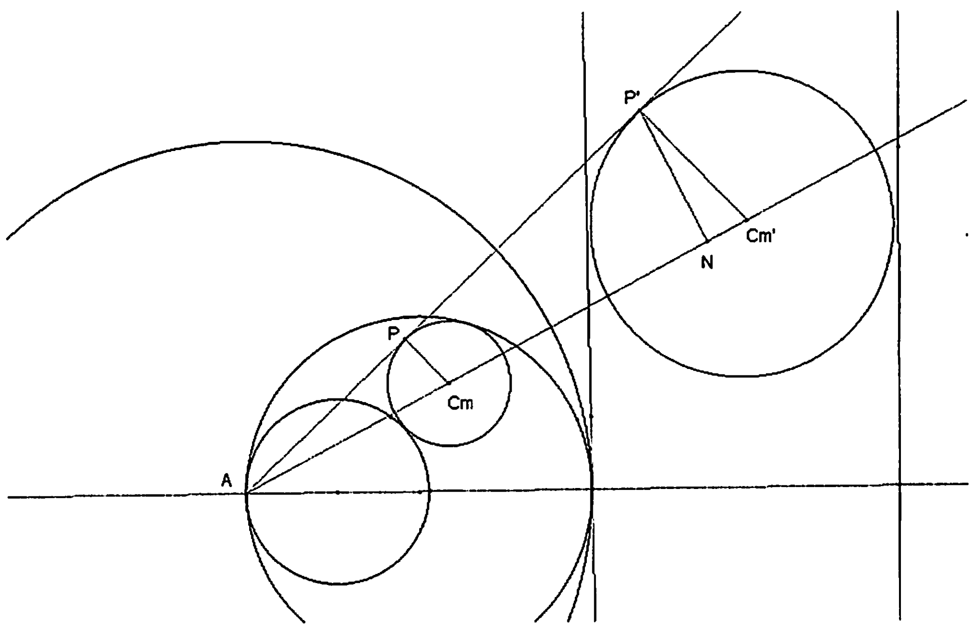
ここで　$AN\cdot AC_m=a^2$ 　$ACm'=AN+NCm'$

$AP\cdot AP'=a^2=ACm\cdot AN$ 　$AP:ACm=AN:AP'$ 　三角形$APCm$ と三角形ANP' は相似となり、ANP' は直角である。よって、三角形$AP'Cm'$と三角形$P'NCm'$ は相似となり、 $P'Cm':NCm'=ACm':Cm'P'$

$P'Cm'=R$ だから　$ACm'\cdot NCm'=R^2$ 　$AC_m=\dfrac{a^2}{AN}=\dfrac{a^2}{AC_m'-NC_m'}$

よって　$r=\dfrac{AC_m}{AC_m'}R=\dfrac{a^2}{AC_m'\cdot(ACm'-NCm')}R=\dfrac{a^2}{ACm'^2-ACm'\cdot NCm'}\cdot R$ 　・・・①

また、三角形$AC_m'O1'$ は直角三角形だから　$AC_m'^2=AO1'^2+C_m'O1'^2$



① の分母を計算する。　以後、$2m=n$ と記す。

$$AC_m'^2-AC_m'\cdot NC_m'=AO_1'^2+C_m'O_1'^2-AC_m'\cdot NC_m'$$

$$=(a+R)^2+(n-1)^2R^2-R^2=(n-1)^2R^2+2aR+a^2=\frac{(n-1)^2a^4}{4}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{a}\right)^2+a^3\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{a}\right)+a^2$$

$\frac{1}{t}-\frac{1}{a}=x$ とおくと　$x>0$　　　止円 C_m の直径 $2r$ を計算すると

$$2r=2\cdot\frac{a^2}{\frac{(n-1)^2a^4}{4}x^2+a^3x+a^2}\cdot\frac{a^2x}{2}=\frac{x}{\frac{(n-1)^2}{4}x^2+\frac{1}{a}x+\frac{1}{a^2}}\quad\cdots②$$

$f(x)=$②とおく。

$$f'(x)=\frac{\left\{\frac{1}{a^2}-\frac{(n-1)^2}{4}x^2\right\}}{\left\{\frac{(n-1)^2}{4}x^2+\frac{1}{a}x+\frac{1}{a^2}\right\}^2}\qquad f'(x)=0\quad x>0\ \text{より}\ x=\frac{2}{a(n-1)}$$

増減表で調べれば、この x の値のとき極大（止円の直径が最大）になる。この直径は

$$f\left(\frac{2}{a(n-1)}\right)=\frac{\frac{2}{a(n-1)}}{\frac{(n-1)^2}{4}\cdot\frac{4}{a^2(n-1)^2}+\frac{1}{a}\cdot\frac{2}{a(n-1)}+\frac{1}{a^2}}=\frac{2}{a(n-1)}\cdot\frac{a^2(n-1)}{2n}=\frac{a}{n}$$

したがって、止円の直径の最大値は　外円径÷ 累円の個数　となる。

4　終わりに

アルベロス図形や算額図形の作者は、どのようにして図形の性質を見付けたのだろうか？和算には証明という考えがなかったから様々な具体例で実測し、帰納的に命題が成り立つことに確信を深めていったに違いない。その直観力に敬服する。

参考文献

1　内田清：複素数と直線と円そしてアルベロスからシュタイナー円鎖へ、2012.10
2　保坂高志・竹谷正・野口敬子（筑波大学大学院修士課程教育研究科）
　研究授業事前課題プリント