Pascalの定理と二次曲線

林　雄一郎　(北海道情報大)

1　はじめに

私は高校生の頃、数学史の本を読んでいて円に関するPascalの定理を知り、証明を試みたができなかった。先生に伺ったところ、初等的な証明を示された。次の学習指導要領で幾何は姿を消し、ベクトル、行列、平面図形の公理的構成などのハイカラな教材が取って変わった。

Blaise Pascal(1623-1662)は12歳の時、独力で三角形の内角の和が2直角であることを見つけた。そんな少年に喜んで父親はユークリッド幾何学原本を与え、数学や古典語、哲学を教えた。16歳の時「円錐曲線試論」を完成し、その中にPascalの定理が含まれていた。Descartesは16歳の少年の作であることを信じなかったといわれる。

高校生の私はその定理の美しさと同年代の少年が発見したことに強い感動を与えられた。Pascalの定理は、円に内接する6角形の場合が有名だが、高校数学の主役である2次関数はもとより分数関数、楕円、退化した2直線などの円錐曲線でも成り立つ。

本稿では、円錐曲線におけるPascalの定理の射影幾何的な証明と円錐曲線は二次曲線となる証明を紹介する。

2　円のPascalの定理

円周上にA,B,C,D,E,Fの点を取ったとき相対する辺ABとDE、BCとEF、CDとFAの交点は一直線（Pascal線）上にある。図1は円周上の点列がABC順に並んでいる場合だが、ランダムな点列の場合でも図2のように成り立つ。

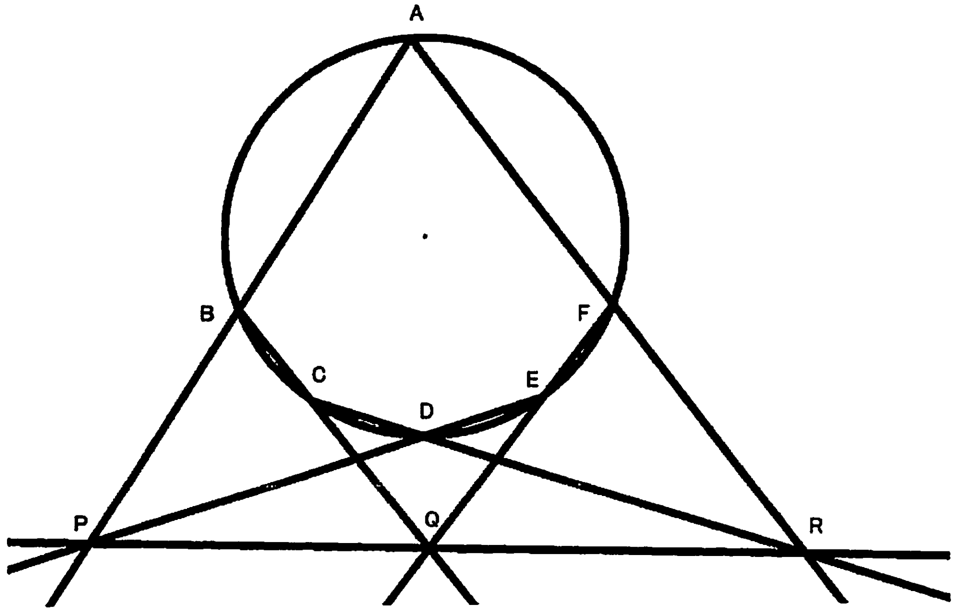


図1

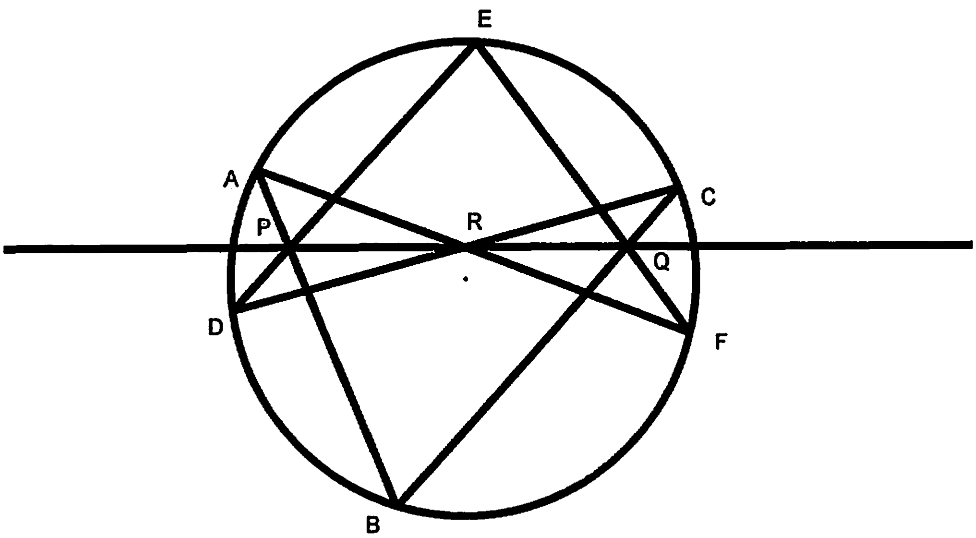


図２

幾何的な証明　補助円を用いて中心が点Ｑの２つの相似な位置関係にある三角形を見出しP,Q,Rの共線を示せばよい。(図３)

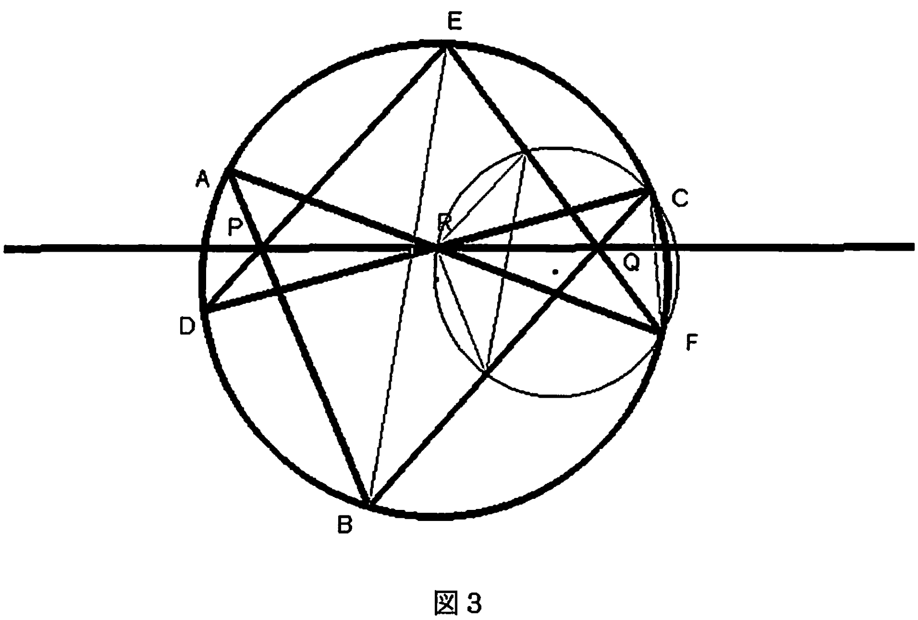


図３

３点Ｃ，Ｆ，Ｒを通る円がＢＣ、ＥＦと交わる点をＫ，Ｌとおく。∠ＫＲＦ＝∠ＢＡＦ（円周角が等しい）よって、ＡＢ//ＲＫ　同様に∠ＬＲＣ＝∠ＥＤＣ　ＤＥ//ＲＬ
また、∠ＬＫＣ＝∠ＥＢＣ　ＢＥ//ＫＬ　したがって、△ＰＢＥ∽△ＲＫＬ
　対応する３頂点を結ぶ３直線ＢＫ、ＥＬ、ＰＲは相似の中心Ｑを通る。
すなわち、Ｐ，Ｑ，Ｒは共線となる。

複素平面での証明

図１で、A,B,C,D,E,F にそれぞれ複素数ζ_i　$(i=1,2,\cdots,6)$、P,Q,R に複素数α,β,γを対応させる。なお、円は単位円と仮定すると$|\zeta_i|=1$　直線 AB の複素数表示の方程式は

$$\frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2}\in R \quad \text{すなわち} \quad \frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2}=\overline{\frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2}}=\frac{\bar{z}-\overline{\zeta_1}}{\bar{z}-\overline{\zeta_2}} \quad (z-\zeta_1)\left(\bar{z}-\overline{\zeta_2}\right)=\left(\bar{z}-\overline{\zeta_1}\right)(z-\zeta_2)$$

$$\left(\overline{\zeta_1}-\overline{\zeta_2}\right)z-(\zeta_1-\zeta_2)\bar{z}=\overline{\zeta_1}\zeta_2-\zeta_1\overline{\zeta_2}$$

$$\frac{\zeta_2-\zeta_1}{\overline{\zeta_1}-\overline{\zeta_2}}=\zeta_1\zeta_2 \qquad \frac{\overline{\zeta_1}\zeta_2-\zeta_1\overline{\zeta_2}}{\overline{\zeta_1}-\overline{\zeta_2}}=\zeta_1+\zeta_2$$

が成り立つことを用いて変形すると

$z+\zeta_1\zeta_2\bar{z}=\zeta_1+\zeta_2$ ・・①　　同様に、直線 DE の方程式　$z+\zeta_4\zeta_5\bar{z}=\zeta_4+\zeta_5$　・・②

直線 AB,DE の交点 P （α）を求める。　①、②から$\bar{z}$を消去すると

$$\alpha=\frac{\zeta_1\zeta_2(\zeta_4+\zeta_5)-\zeta_4\zeta_5(\zeta_1+\zeta_2)}{\zeta_1\zeta_2-\zeta_4\zeta_5}=\frac{\overline{\zeta_4}+\overline{\zeta_5}-\overline{\zeta_1}-\overline{\zeta_2}}{\overline{\zeta_4}\overline{\zeta_5}-\overline{\zeta_1}\overline{\zeta_2}}$$

同様に　$$\beta=\frac{\overline{\zeta_5}+\overline{\zeta_6}-\overline{\zeta_2}-\overline{\zeta_3}}{\overline{\zeta_5}\overline{\zeta_6}-\overline{\zeta_2}\overline{\zeta_3}} \qquad \gamma=\frac{\overline{\zeta_1}+\overline{\zeta_6}-\overline{\zeta_3}-\overline{\zeta_4}}{\overline{\zeta_1}\overline{\zeta_6}-\overline{\zeta_3}\overline{\zeta_4}}$$

$$\alpha-\gamma=\frac{\left(\overline{\zeta_4}+\overline{\zeta_5}-\overline{\zeta_1}-\overline{\zeta_2}\right)\left(\overline{\zeta_1}\overline{\zeta_6}-\overline{\zeta_3}\overline{\zeta_4}\right)-\left(\overline{\zeta_4}\overline{\zeta_5}-\overline{\zeta_1}\overline{\zeta_2}\right)\left(\overline{\zeta_1}+\overline{\zeta_6}-\overline{\zeta_3}-\overline{\zeta_4}\right)}{\left(\overline{\zeta_4}\overline{\zeta_5}-\overline{\zeta_1}\overline{\zeta_2}\right)\left(\overline{\zeta_1}\overline{\zeta_6}-\overline{\zeta_3}\overline{\zeta_4}\right)}$$
$$=\frac{\left(\overline{\zeta_4}-\overline{\zeta_1}\right)\left(\overline{\zeta_1}\overline{\zeta_6}-\overline{\zeta_3}\overline{\zeta_4}+\overline{\zeta_2}\overline{\zeta_3}-\overline{\zeta_5}\overline{\zeta_6}+\overline{\zeta_4}\overline{\zeta_5}-\overline{\zeta_1}\overline{\zeta_2}\right)}{\left(\overline{\zeta_4}\overline{\zeta_5}-\overline{\zeta_1}\overline{\zeta_2}\right)\left(\overline{\zeta_1}\overline{\zeta_6}-\overline{\zeta_3}\overline{\zeta_4}\right)}$$

$$\beta-\gamma=\frac{\left(\overline{\zeta_6}-\overline{\zeta_3}\right)\left(\overline{\zeta_1}\overline{\zeta_6}-\overline{\zeta_3}\overline{\zeta_4}+\overline{\zeta_2}\overline{\zeta_3}-\overline{\zeta_5}\overline{\zeta_6}+\overline{\zeta_4}\overline{\zeta_5}-\overline{\zeta_1}\overline{\zeta_2}\right)}{\left(\overline{\zeta_5}\overline{\zeta_6}-\overline{\zeta_2}\overline{\zeta_3}\right)\left(\overline{\zeta_1}\overline{\zeta_6}-\overline{\zeta_3}\overline{\zeta_4}\right)}$$

$$\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=\frac{\left(\overline{\zeta_4}-\overline{\zeta_1}\right)\left(\overline{\zeta_5\zeta_6}-\overline{\zeta_2\zeta_3}\right)}{\left(\overline{\zeta_6}-\overline{\zeta_3}\right)\left(\overline{\zeta_4\zeta_5}-\overline{\zeta_1\zeta_2}\right)}=\frac{\overline{\zeta_1\zeta_4}\left(\zeta_4-\zeta_1\right)\overline{\zeta_2\zeta_3\zeta_5\zeta_6}\left(\zeta_5\zeta_6-\zeta_2\zeta_3\right)}{\overline{\zeta_3\zeta_6}\left(\zeta_6-\zeta_3\right)\overline{\zeta_1\zeta_2\zeta_4\zeta_5}\left(\zeta_4\zeta_5-\zeta_1\zeta_2\right)}$$

$$=\frac{\left(\zeta_4-\zeta_1\right)\left(\zeta_5\zeta_6-\zeta_2\zeta_3\right)}{\left(\zeta_6-\zeta_3\right)\left(\zeta_4\zeta_5-\zeta_1\zeta_2\right)}=\overline{\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}}$$

$\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}$ は実数となるからα,β,γは一直線上にある。P,Q,Rは共線となる。

3　円錐曲線の Pascal の定理

定点を通る２直線、例えば、$y=a(x-1)+2$　$y=-\dfrac{1}{2a}(x-3)+4$　の交点の軌跡は楕円となる。すなわち　$x^2+2y^2-4x-12y+19=0$

射影幾何では、“点円錐曲線”を射影的関係にある２つの直線族の対応する２直線の交点の軌跡で定義する。点円錐曲線上に関する Pascal の定理は次のように表される。

定理　平面上の６つの点が同一点円錐曲線上の点であるための必要十分条件は、これらの点を頂点とする任意の六角形の相対する辺の交点が共線となることである。

証明

S0 を通る直線族（線束といい ＞S0＜ と記す）と S1 を通る直線族が１：１に対応する。これは線と線の射影対応で＞S0＜⊼＞S1＜・・・①と記す。S0B↔S1B、S0C↔S1C, ,S0D↔S1D、S0S1↔S1S0 で点 S0,S1 は交点だから曲線上にある。

点 A は B、C、D、S0、S1 以外の曲線上の任意の点とする。S0C と BA は点 C0、CS1 と AD は点 C1、S1B と S0D は点 T で交わるとする。

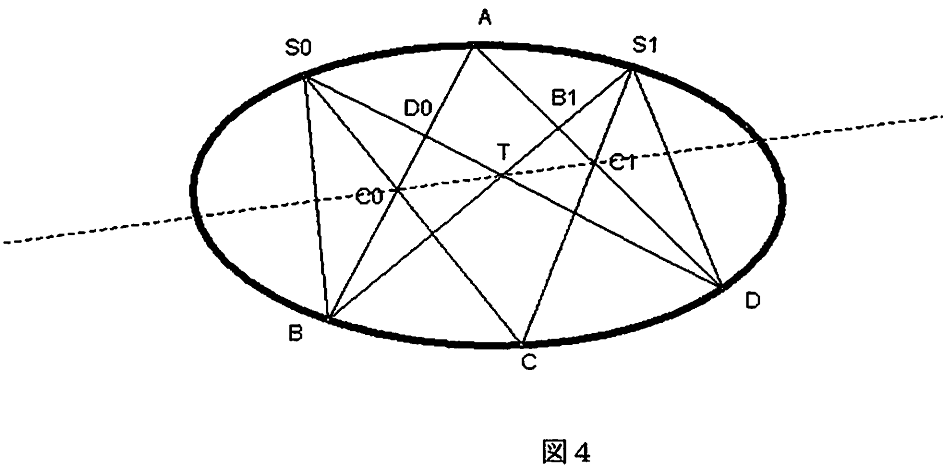


図４

直線 AB は線束＞S0＜と交わる（線束＞S0＜を切断する）から、AB 上の点（＜AB＞と記す）と＞S0＜の要素である半直線は１：１に対応する。これは点と線の配景的対応とい

い $>S0<\overline{\wedge}<AB>$ ・・・②と記す。

同様に、直線 AD は線束 $>S1<$ を切断するから、AD 上の点集合と $>S1<$ の要素である半直線は１：１に対応する。点と線の配景対応であり $>S1<\overline{\wedge}<AD>$ ・・・③

① ② ③より $<AB>\overline{\wedge}>S0<\wedge>S1<\overline{\wedge}<AD>$ ∴ $<AB>\wedge<AD>$

こうして、直線 AB 上の点と直線 AD 上の点は１：１に対応する。この射影対応を ϕ とおく。ところが、点 A にはそれ自身が対応するから、ϕ は点と点の配景対応となる。この配景の中心は T（定点）である。

したがって、ϕ(A) =A、ϕ(B) ＝B1、ϕ(D0) =D ϕ(C0) =C1 よって、C0C1 は T で交わり、点 C0、C1、T は共線となる。

逆に、C0,C1,T が共線と仮定する。直線 BC0 と直線 DC1 の交点を A とする。AB 上の点と AD 上の点は点 C を変化させれば直線 C0C1 が変化し 1:1 に対応する（配景対応）

∴ $<AB>\overline{\wedge}<AD>$ がいえる。

また、$<AB>\overline{\wedge}>S0<$、$<AD>\overline{\wedge}>S1<$ を考えると $>S0<\wedge>S1<$ がいえる。

よって、６つの点 S0,S1,A,B,C,D,は曲線上にある。

この定理は双曲線、放物線、２直線のいずれの場合も証明されたことになる。(図５～７)
なお、５点 S0,S1,B,C,D が決まれば定点 T が決まり、T を中心に直線 C0C1 が回転すると点 A の軌跡が点円錐曲線になるから、５点が決まると円錐曲線は完全に決まる。

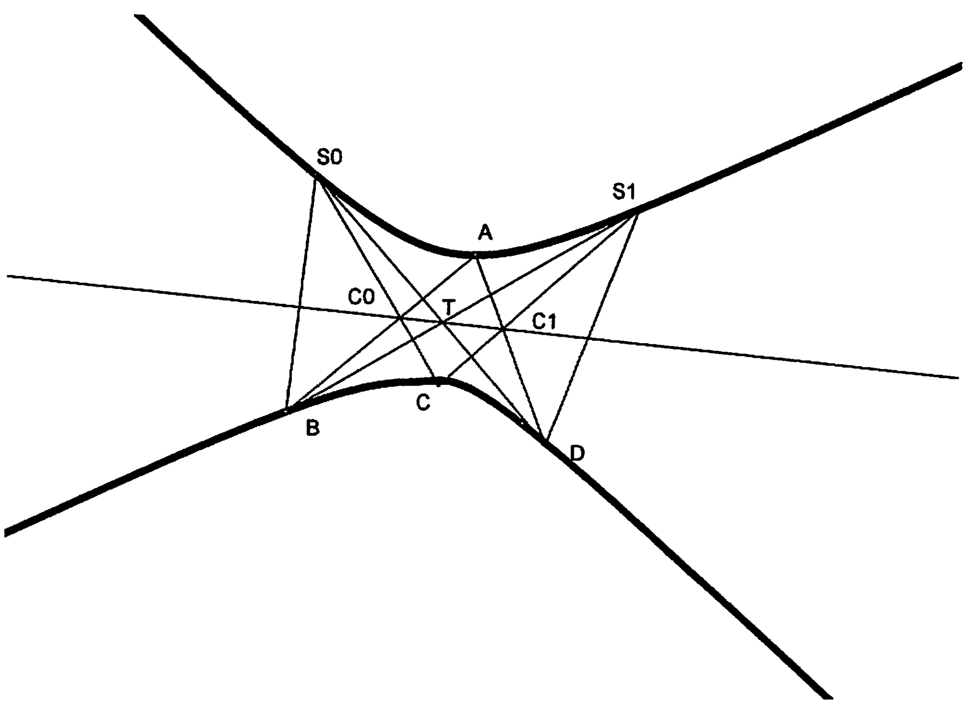


図５

放物線の場合の Pascal の定理

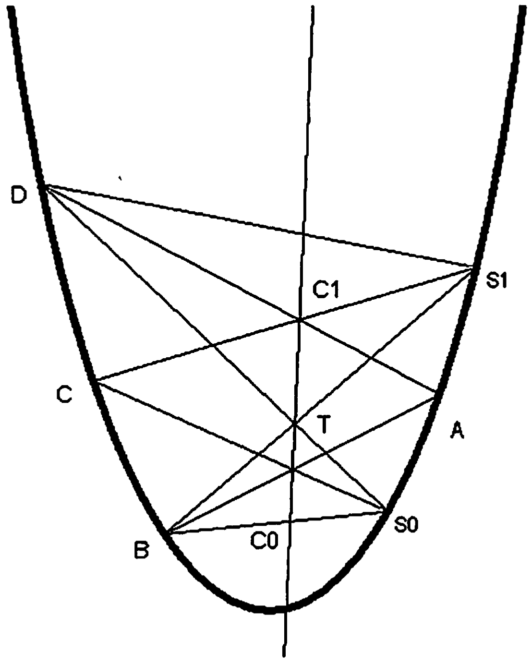


図 6

2 直線の場合の Pascal の定理（Pappos の定理で知られている）

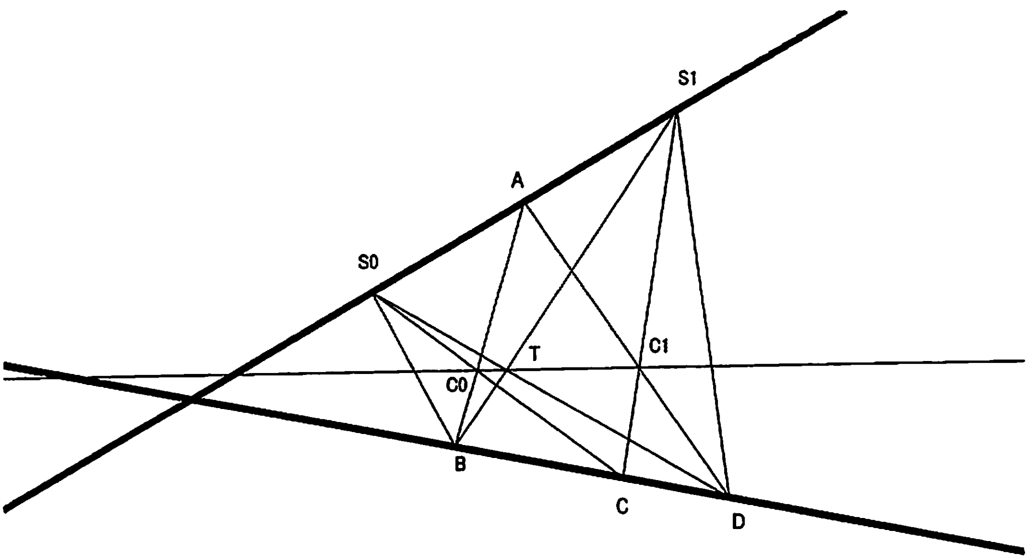


図 7

Pascal の定理の代数幾何的証明

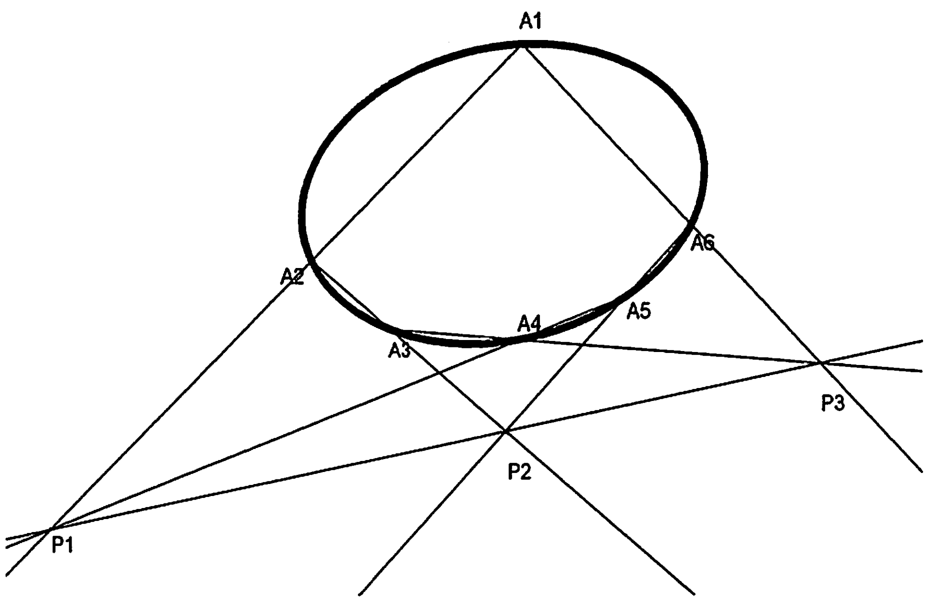
定理　固有２次曲線（楕円、放物線、双曲線）に内接する六辺形の相対する辺は次のいずれかを満たす。

（1）l_i, l_i' の交点 P_i が三つ共に存在し、共線である

（2）一組の相対する辺、たとえば l_1, l_1' は平行、P_2, P_3 は存在し、直線 P_2P_3 が l_1 と平行である（P_1 は無限遠点となるが、射影幾何ではこの場合も（1）になる）

（3）l_i, l_i' はそれぞれ互いに平行である（射影幾何では（1）の場合になる）

証明　　図のように２次曲線 Γ に内接する６辺形を $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ とする。



直線 A_iA_j を l_{ij} と記し、この方程式を $l_{ij}(x,y)=0$ あるいは $l_{ij}=0$ と記す。

４点 A_1, A_2, A_3, A_4 を通る２次曲線 Γ_λ を　$l_{12}l_{34}+\lambda l_{23}l_{14}=0$　・・・①　とおく。

Γ 上の第５の点 (a,b) を取り、$l_{12}(a,b)l_{34}(a,b)+\lambda l_{34}(a,b)l_{14}(a,b)=0$　となるように λ を定めれば Γ は Γ_λ と５点で交わるから、Γ は Γ_λ と一致し①は Γ の方程式である。

同様に、$l_{45}l_{61}+\mu l_{56}l_{14}=0$ ・・・②　が Γ の方程式となるように $\mu(\neq 0)$ を定めることが出

来る。①と②は同じ方程式を表すから、$k(\neq 0)$が存在し、$l_{12}l_{34}+\lambda l_{23}l_{13}\equiv k(l_{45}l_{61}+\mu l_{56}l_{14})$

移項すれば　$l_{12}l_{34}-kl_{45}l_{61}=l_{14}(k\mu l_{56}-\lambda l_{23})$

左辺＝０を２次曲線と考えると　　$l_{12}l_{34}-kl_{45}l_{61}=0$・・・④　この曲線は
$l_{14}=0$　と　$k\mu l_{56}-\lambda l_{23}=0$　・・・⑤　に分解される。
４点A_1,A_4,P_1,P_3　は方程式④を満たす。
$l_{14}=0$の上にA_1,A_4はあるが、P_1,P_3はない。よって、P_1,P_3は⑤の上にある。
すなわち、⑤は直線P_1P_3の方程式である。
　もし、A_2A_3とA_5A_6の交点P_2が存在するならば、P_2は⑤を満たす。
よって、３点P_1,P_2,P_3は同一直線⑤の上にある。また、もし$A_2A_3 /\!/ A_5A_6$ならば直線⑤はこれらと平行になる。

4　円錐曲線は２次曲線である

　点円錐曲線が２次曲線であることを確かめる。そのために、点円錐曲線を斜交座標面OX,OY上で考察する。
　点円錐曲線を図８のように配置し、曲線上の点を配置する。点Aを原点とし、X軸OX上に点B、C0、Y軸OY上に点D,C1を置く。点Cは動点である。直線C0TC1がPascal線である。S0(a,b)、S1(c,d)、C0$(p,0)$,C1$(0,q)$,T(t,s),C(x,y)と座標を定める。

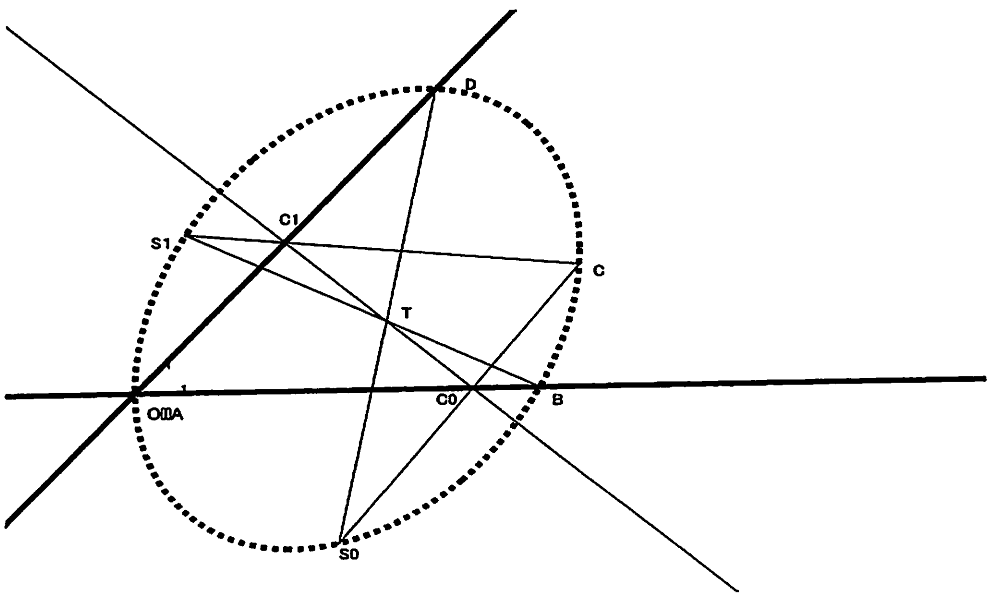


図８

直線 C0C1 は　$\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}=1$　点 T は Pascal の定理よりこの直線上にあるから

$$\frac{t}{p}+\frac{s}{q}=1 \quad \cdot\cdot\cdot ①$$ が成り立つ。

直線 S0C の方程式は　$y-b=\dfrac{-b}{p-a}(x-a)$　　$p=\dfrac{-bx+ay}{y-b}$

直線 S1C1 の方程式は $y-d=\dfrac{q-d}{-c}(x-c)$　　$q=\dfrac{-cy+dx}{x-c}$　これを①に代入する

$$t(y-b)(cy-dx)+s(x-c)(bx-ay)+(bx-ay)(cy-dx)=0$$ まとめると

$$b(s-d)x^2+c(t-a)y^2+(ad+bc-dt-as)xy+(bdt-bcs)x+(acs-bct)y=0$$

したがって、２次曲線となることがわかる。

5　終わりに

共線となるユークリッド幾何学の命題は多い。垂心、重心、外心が共線となるオイラー線や外接円上の任意の点から三角形の３辺に下した点が共線となるシムソン線は有名である。

射影幾何では、線分の長さや角の大きさ、面積など図形の計量を無視し、“線上にある”、“点を通る”などに着目し、また普通の点と無限遠点とを同等に扱う射影平面で図形を考察する。このため、公理は簡単になるし命題や論理が明快になる。また、双対の原理が成り立つのが特徴であり、異なると思われる定理が統合的に理解される。例えば、Brianchon の定理と Pascal の定理は双対な命題となり、美しさを感じる。また、射影幾何的な証明は代数幾何的な手法や複素数を用いた計算による証明に比べると簡潔となる。

参考図書

福原満洲雄：射影幾何、実教出版、1985
矢野健太郎：図形の性質（下）新初等数学講座第２巻、幾何第２分冊、小山書店、1955
三村征雄他：大学演習・代数学と幾何学、裳華房、1959
片山孝次：複素数の幾何学、岩波書店、1989