H27.10.3　第９４回数学教育実践研究会資料

めげずに出す、いじわる(?) 問題～夏休みの研修をヒントに～

北海道石狩南高等学校　　福島　洋一

０．はじめに

「これは三角比の問題」、「これは関数の問題」のように単元とセットにして考える問題ではなく、複数の単元の観点から見られるような問題を出題したい。

（某大学オープンキャンパスでの入試問題説明）

指導時間が少なくなるのは何でも指導しようと思うから。本質を教えて活用させると考えるべきである。　（日数教講習会　文科省初等中等教育局　長尾篤志氏）

担当している学年も３年生になり、もう私の出題に「いじわる」という生徒は、ほぼいなくなりました。粘り強いガイダンスが実を結んだのか、単に生徒が慣れたのか、言っても無駄だと諦めてしまったのか、授業で扱った例題とは違う問題の出題も浸透してきたようです。今年度は数学ⅠⅡＡＢを総合的に学ぶ学校設定科目を担当しています。上記の言葉に刺激され（勇気づけられ・調子に乗り・触発され）、夏休み明けの実力テストや定期試験で出題した問題を紹介します。

１．問題作成の方針

次の方針で問題を考えた。

①複数の分野の知識が使える問題

②授業で扱った問題の「考え方」が使える問題

③本校生徒の実態に合った問題

２．問題例

(1) 実力テスト出題

問題例①

$AB=3$，$AC=4$，$\cos\angle BAC=\dfrac{1}{6}$ を満たしている３点 A,B,C について、AB と AC を２辺とする平行四辺形 $ABDC$ を作ったとき、対角線 AD の長さを求めよ。

出題経緯

三角比の問題として余弦定理で解けるが、ベクトルを使っても解ける。ベクトルの図形的な意味を理解していないで解く生徒も多いので、問題提起する意図もあった。

結果

ベクトルを使って解いた生徒はいなかった。三角比でも解けない生徒も多かった。ベクトルの問題として出題したら解けた可能性もある。（$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$ を使えなかった生徒多数いたため）

問題例②

２次方程式 $x^2-4x+1=0$ の解を α，β（$\alpha>\beta$）とし、$P_n=\alpha^n+\beta^n$ とする。このとき、$P_4=mP_3+nP_2$ を満たす整数 m，n の値の組をひとつ求めよ。【2003　東大（改題）】

出題経緯

$P_{k+2}=mP_{k+1}+nP_k$ が本来の形。$\alpha^2-4\alpha+1=0$，$\beta^2-4\beta+1=0$ を利用すれば、とても簡単な問題。しかし、自分は漸化式を作って解いた。（やってしまった…。）生徒はどうするのだろうと思い実態に即して問題を簡単にすると、1 次不定方程式として解く方法も浮上した。

結果

1 次不定方程式にして解く生徒が大多数だった。残念ながら $\alpha^2-4\alpha+1=0$，$\beta^2-4\beta+1=0$ という式を作った生徒は 1 人もいなかった。方程式を実際に解いて値を代入している生徒も結構多かった。

(2) 定期テスト出題

問題例①

円　$x^2+y^2=8$ に円外の点 $(4,0)$ から引いた接線の方程式を求めよ。
<参考>
円　$x^2+y^2=r^2$　上の点 (a,b) における接線の方程式は $ax+by=r^2$ である。例えば円 $x^2+y^2=25$　上の点 $(3,4)$ における接線の方程式は $3x+4y=25$ である。

出題経緯

授業で扱った関連問題
　微分分野の曲線外の点から引いた接線の方程式を求める問題

「接点を文字で置く」方法を使えるかどうかを確認したい問題。円の接線に関しては 3 年生になってからの授業では扱っていないので、参考として公式を提示した。幾何的なアプローチ（45° なので傾きが簡単にわかる。）もできるように、平易な点を設定した。

結果

幾何的なアプローチをする者も何名かいた。それよりも正答者の少なさにショックを受けた…。

問題例②

$\mathrm{A}B=4$，$BC=5$，$CA=6$ である△$\mathrm{A}BC$ において、点Aから辺 BC に引いた垂線 $\mathrm{A}H$ の長さを求めよ。

出題経緯

授業で扱った関連問題
・円に内接する四角形の４辺の長さから対角線の長さを求める問題
・四面体の体積を利用して、ある頂点から向かい合う面に下ろした垂線の長さを求める問題

「垂線を高さととらえて計算すること」または「求めたいものが２つあるときに違う観点から２つの式を作る」ことができるかを確認したい問題。三平方の定理を使い中学校の知識でも解ける。端の角の三角比を求め、辺の比率から求める方法もある。

結果

取り組みやすいようで、無回答者は少なかったが、内角の二等分線と対辺の内分比の公式を誤使用した生徒が多かった。解法は面積の利用と三平方の定理の利用で二分された。

問題例③

関数　$y=(x^2+2x)^2+4(x^2+2x)+5$　の最小値と、そのときの x の値を求めよ。

出題経緯

授業で扱った関連問題
三角関数を含む関数で置き換えを使う問題

置き換えをすることで、二次関数の問題になる。その中で「置き換えたものの取りうる値の範囲を考える」事ができるかを確認したい問題。展開して微分、増減表を使っても解ける。

結果

x^2+2x を他の文字に置き換えることはできても、取りうる値の範囲を考えず、「$x=-1\pm i$ のとき最小値を取る」という解答が続出した。

⑶おまけ（考え方の利用を意識した授業内の問題展開例）

問題例①

2160 の正の約数の総和を求めよ。

$\Updownarrow$

下の積をすべて加えよ

１×１	２×１	３×１	・	・	・	１００×１
１×２	２×２	３×２	・	・	・	１００×２
１×３	２×３	３×３	・	・	・	１００×３
・	・	・	・	・	・	・
・	・	・	・	・	・	・
・	・	・	・	・	・	・
・	・	・	・	・	・	・
・	・	・	・	・	・	・
１×１００	２×１００	３×１００	・	・	・	１００×１００

問題例②

$50!$ が 3^n で割り切れるような自然数 n の最大値を求めよ。

$\Updownarrow$

$20!$ の正の約数の個数を求めよ。

３．まとめ

　このような問題の正答率はあまり高くない。むしろかなり悪い。だからと言って試験に出してはいけないと思うのではなく、そのたびに授業を改善しなければならないと感じ、自分なりの工夫を重ねてきたつもりである。最悪のパターンは、出題する問題の全てが「授業で扱った問題の数字を換えたもの」であり、その試験の結果が良くて、生徒も教師も「力が付いている」と勘違いすることではないだろうか（何を評価する試験なのかにもよりますが…）。最初に示した通り、大学も単元によって区切られた問題を暗記のみで解く力の無意味さを訴えている。高校の指導でもその部分を強く意識する必要がある。

　適切な問題を選んだり、作ったりすることはとても楽しいのだが、面倒なことでもある。この作業をするたびに、自分の教材への理解の浅さ、発想力の乏しさを実感することとなる。そしてそれが成長するためのモチベーションとなっている。生徒には「いじわる」「ひねくれている」と揶揄されることもあるが、へこたれずにやっていきたい。