ベクトルの内積和の性質について

秋田県立秋田高等学校　教諭　髙　倉　　亘

（*Keywords*：内積和、中線定理、重心）

1　緒　　言

『内積和』というものを次のように定義する。

> 任意の点 P と定点集合 $S=\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ があり、
>
> $$f(P)=\sum_{i\neq j}\overrightarrow{PA_i}\bullet\overrightarrow{PA_j}$$
>
> で定義される関数 $f(P)$ を点 P の S に関する内積和という。

本稿では、平面上の２点（線分）および平面上の３点（三角形）、更に、一般に定点集合 $\{A_i\}$ に関する内積和について、その零点集合 $S^0=\{P \mid f(P)=0\}$ が定点集合の重心を中心とする円になることを示す。[1－2)]

2　内積和の計算

（1）線分 AB について

平面上に線分 AB と任意の点 P がある。ここで、AB の中点を M、$AB=a$、$PM=\ell$ とする。点 P の定点集合 $\{A, B\}$ に関する内積和 $f(P)$ は次のようになる。

$$f(P)=\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}$$

$$=(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA})\bullet(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MB})$$

$$=\left|\overrightarrow{PM}\right|^2+\overrightarrow{PM}\bullet(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})+\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}$$

$$=\left|\overrightarrow{PM}\right|^2+\overrightarrow{PM}\bullet\vec{0}+\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}$$

$$=\left|\overrightarrow{PM}\right|^2+\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}$$

$$=\ell^2-\frac{a^2}{4}$$

これより、$f(P)=0$ を満たす点 P は、次のベクトル方程式を満たす。

$$\left|\overrightarrow{PM}\right|=\frac{a}{2}$$

すなわち、点PはABを直径、中点Mを中心とする円を描く。

また、一般に$f(P)=K$（$K>0$）を満たす点Pは、次のベクトル方程式を満たす。

$$\left|\overrightarrow{PM}\right|=\sqrt{K+\frac{a^2}{4}}$$

すなわち、この場合には、M を中心とする半径$\sqrt{K+\dfrac{a^2}{4}}$の円を描く。ここで、Mは線分ABの中点であるから、線分ABの重心である。

（2） 三角形ABCについて

平面上に△ABCと任意の点Pがある。三角形の3辺の長さを$BC=a$、$CA=b$、$AB=c$、また、重心をG、BCの中点をMとする。

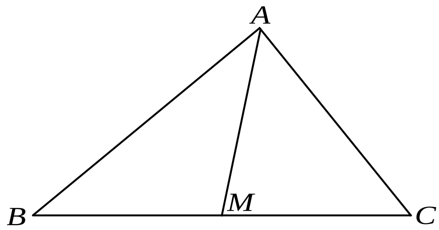
△ABCにおいて、次の中線定理が成立する。

定理（中線定理）

△ABCにおいて、BCの中点をMとすれば、

$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$

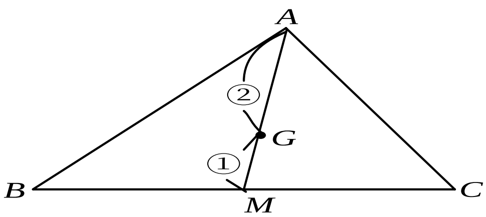
が成立する。



ここで、GM^2をa、b、cで表すことを考える。中線定理より、

$$\begin{aligned}b^2+c^2&=2AM^2+\frac{BC^2}{2}\\&=2(3GM)^2+\frac{a^2}{2}\\&=18GM^2+\frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

したがって、$GM^2=\dfrac{1}{18}\left(b^2+c^2-\dfrac{a^2}{2}\right)$



次に、このことを用いて、$\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}$ を a、b、c で表すことを考える。

$$\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}=(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MC})$$

$$=(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{GM}-\overrightarrow{MB})$$

$$=\left|\overrightarrow{GM}\right|^2-\left|\overrightarrow{MB}\right|^2$$

$$=\frac{1}{18}\left(b^2+c^2-\frac{a^2}{2}\right)-\frac{a^2}{4}$$

$$=\frac{1}{18}\left(b^2+c^2-5a^2\right)$$

同様にして、

$$\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA}=\frac{1}{18}\left(c^2+a^2-5b^2\right)、\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=\frac{1}{18}\left(a^2+b^2-5c^2\right)$$

が得られる。これらのことを用いて、点 P の定点集合$\{A,B,C\}$に関する内積和 $f(P)$ は次のようになる。

$$f(P)=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$$

$$=(\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GB})\cdot(\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GC})+(\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GC})\cdot(\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GA})\cdot(\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GB})$$

$$=3\left|\overrightarrow{PG}\right|^2+2\overrightarrow{PG}\cdot(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}$$

$$=3\left|\overrightarrow{PG}\right|^2+2\overrightarrow{PG}\cdot\vec{0}+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}$$

$$=3\left|\overrightarrow{PG}\right|^2+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}$$

$$=3\left|\overrightarrow{PG}\right|^2-\frac{1}{6}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

これより、$f(P)=0$ を満たす点 P は、次のベクトル方程式を満たす。

$$\left|\overrightarrow{PG}\right|=\sqrt{\frac{1}{18}\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

すなわち、点 P は G を中心とする半径 $\sqrt{\frac{1}{18}\left(a^2+b^2+c^2\right)}$ の円を描く。

また、一般に $f(P)=K$（$K>0$）を満たす点 P は、次のベクトル方程式を満たす。

$$\left|\overrightarrow{PG}\right| = \sqrt{\frac{K}{3} + \frac{1}{18}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}$$

すなわち、この場合には、G を中心とする半径 $\sqrt{\frac{K}{3} + \frac{1}{18}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}$ の円を描く。

（３） 定点集合 $\{A_i\}$ について

平面上に定点集合 $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ と定点集合の重心 G および、任意の点 P がある。

ここで、 $A_i \neq A_j (i \neq j)$ とする。また、２次の恒等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2} + 2\sum_{i \neq j} a_i a_j \text{ より、} \sum_{i \neq j} a_i a_j = \frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}\right\}$$

が成立するから、これらの要素をベクトル、積を内積に置き換えて、点 P の定点集合 $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ に関する内積和 $f(P)$ は次のようになる。

$$f(P) = \frac{1}{2}\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{PA_i}\right|^2 - \sum_{i=1}^{n}\left|\overrightarrow{PA_i}\right|^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left|n\overrightarrow{PG}\right|^2 - \left(n\left|\overrightarrow{PG}\right|^2 + \sum_{i=1}^{n}\left|\overrightarrow{GA_i}\right|^2\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{n\left(n-1\right)\left|\overrightarrow{PG}\right|^2 - \sum_{i=1}^{n}\left|\overrightarrow{GA_i}\right|^2\right\}$$

これより、 $f(P) = 0$ を満たす点 P は、次のベクトル方程式を満たす。

$$\left|\overrightarrow{PG}\right| = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left|\overrightarrow{GA_i}\right|^2}$$

すなわち、重心 G を中心とする半径 $\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left|\overrightarrow{GA_i}\right|^2}$ の円を描く。

また、一般に $f(P) = K$ （$K > 0$）を満たす点 P は、次のベクトル方程式を満たす。

$$\left|\overrightarrow{PG}\right| = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\left(2K + \sum_{i=1}^{n}\left|\overrightarrow{GA_i}\right|^2\right)}$$

すなわち、この場合には、G を中心とする半径 $\sqrt{\dfrac{1}{n(n-1)}\left(2K+\sum_{i=1}^{n}\left|\overrightarrow{GA_i}\right|^2\right)}$ の円となる。

3　結　　言

本稿は、ベクトルの教材作りの中で思いついたものです。平面上において、２点の集合（線分）および３点の集合（三角形）更に、一般に定点集合 $\{A_i\}$ に関して内積和が一定な点 P の軌跡は重心を中心とする円になるという美しい結果が導かれました。この教材が高校生にとっても考察していて楽しいと思えるものあって欲しいと願っています。また、この教材に関しては更に拡張の余地が十分にあると思われますので、本稿をもとに、新たな問題提起がなされることを期待します。

参 考 文 献

１）齋藤正彦「線型代数入門」東京大学出版会.
２）佐竹一郎「線型代数学」裳華房.