

三角柱から正三角形の断面を切り取る方法

北海道札幌丘珠高等学校 教諭 高倉 亘

(Keywords: 三角柱、切断面、正三角形、4次方程式)

1 緒言

平成22年お茶の水女子大学において、次のような趣旨の問題が出題された。¹⁾

底面がどのような三角形であっても高さが十分に高ければ、三角柱と交わる適当な平面によって、正三角形の断面を切り取ることができることを示しなさい。

この問題は簡単な4次方程式を解く問題に帰着される。本稿では、この問題を考察し、切断パターンと側面展開図を示す。この問題をもとにOHPシートなどで以下に示す切断パターンの模型などを作成すると単純ながらも「数学の美」を感じ取ることができる。この問題は、そのような観点から教育的価値が高いものと思われる。

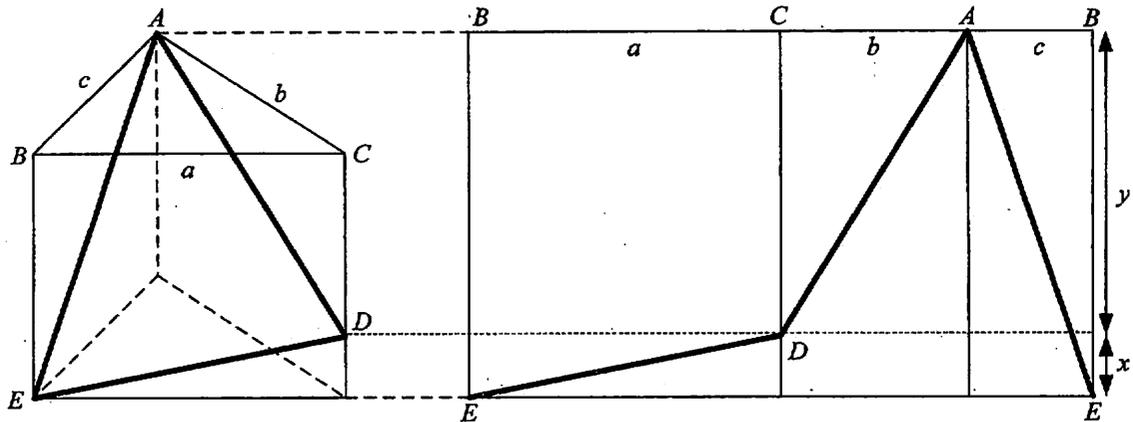
2 考察

定理

底面がどのような三角形であっても高さが十分に高ければ、三角柱と交わる適当な平面によって、正三角形の断面を切り取ることができる。

proof

底面の三角形の一辺の長さを a 、 b 、 c ($a \geq b \geq c$) とおく。平面 π と三角柱の側面との交線を三角柱の展開図に描くと、次のようになる。



正三角形の各辺の長さが等しいことから、

$$a^2 + x^2 = b^2 + y^2 = c^2 + (x+y)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + x^2 = b^2 + y^2 \cdots \textcircled{1} \\ b^2 + y^2 = c^2 + (x+y)^2 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

である。任意の $a, b, c (a \geq b \geq c)$ に対して、①、②を満たす $x, y (x \geq 0, y \geq 0)$ が存在することを示せばよい。

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow x(x+2y) = b^2 - c^2 \dots \textcircled{2}'$$

i) $b = c$ のとき

②'より、 $x = 0$ であり、このとき、①より、 $y = \sqrt{a^2 - b^2}$ となるので、①、②を満たす $x, y (x \geq 0, y \geq 0)$ が存在する。

ii) $b > c$ のとき

②'より、 $x = 0$ であり、このとき、②より、 $y = \frac{b^2 - c^2}{2x} - \frac{x}{2}$ となるので、①へ代入すると、

$$a^2 + x^2 = b^2 + \left(\frac{b^2 - c^2}{2x} - \frac{x}{2} \right)^2 \Leftrightarrow 3x^4 + 2(2a^2 - b^2 - c^2)x^2 - (b^2 - c^2)^2 = 0 \dots \textcircled{3}$$

となる。ここで、 $x^2 = X (> 0)$ と置き、 $f(X) = 3X^2 + 2(2a^2 - b^2 - c^2)X - (b^2 - c^2)^2$ とすれば、 $f(0) = -(b^2 - c^2)^2 < 0$ であるから、 $f(X)$ のグラフが下に凸な放物線を表すことを考慮して、 $f(X) = 0$ は $X > 0$ の範囲にただ一つの実数解をもつ。よって、

③を満たす $x (> 0)$ が存在する。このとき、 $a \geq b$ より、

$$y^2 = a^2 - b^2 + x^2 \geq x^2 > 0$$

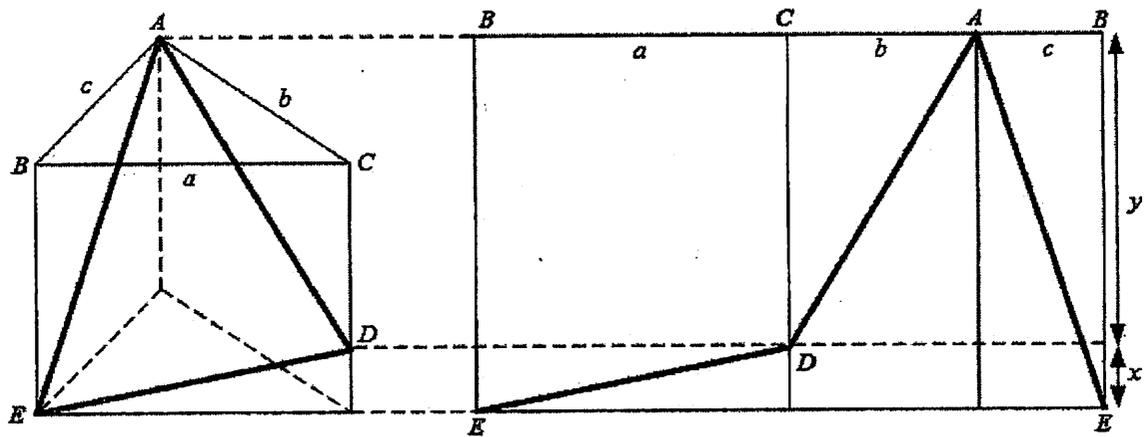
であるから、①、②を満たす $x, y (> 0)$ が存在する。

以上より、底面がどのような三角形であっても高さが十分に高ければ、三角柱と交わる適当な平面によって、正三角形の断面を切り取ることができる。

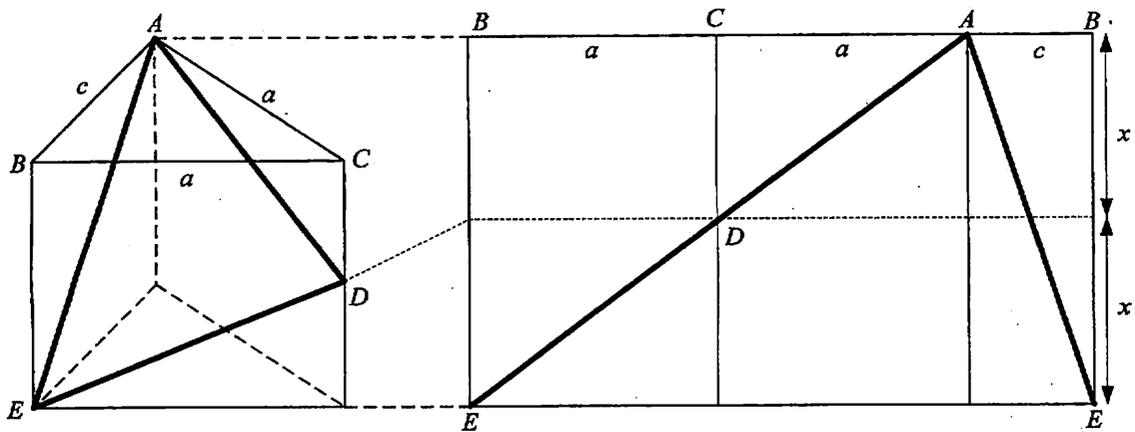
q.e.d.

3 切断パターンと側面展開図

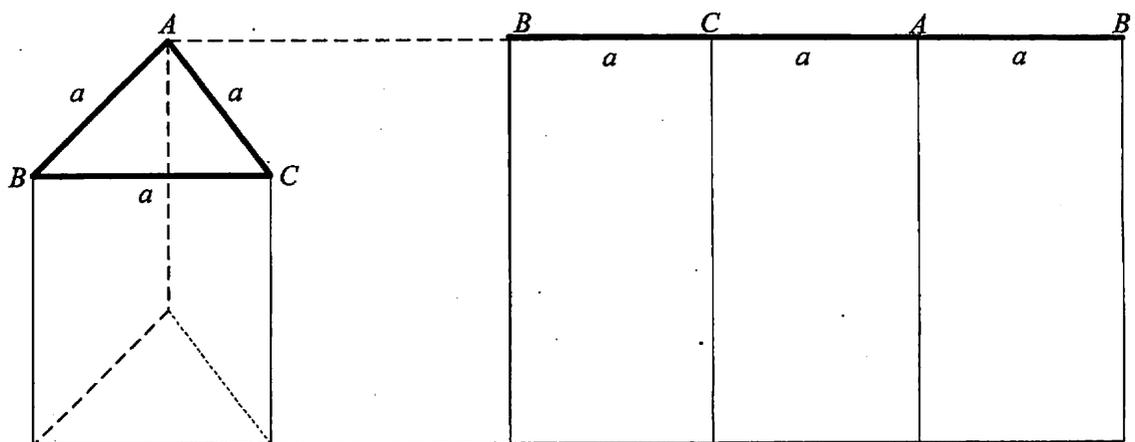
(1) $a > b > c$ のパターン



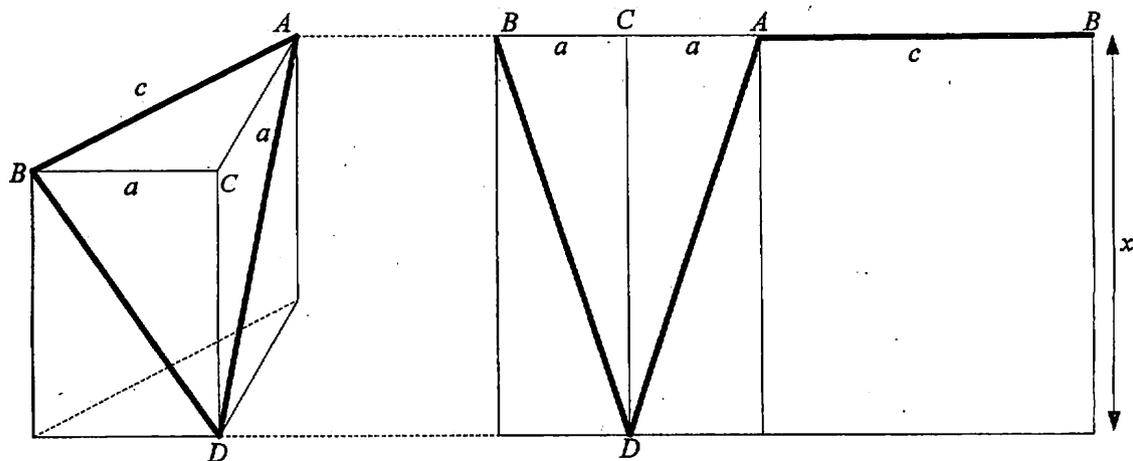
(2) $a = b > c$ のパターン



(3) $a = b = c$ のパターン



(4) $a=b < c$ のパターン



参考文献

- 1) 平成22年 お茶の水女子大学 入学試験問題. 数学専門A1 大問4番

4 右図のような三角形ABCを底面とする三角柱ABC-DEFを考える.

(1) $AB = AC = 5$, $BC = 3$, $AD = 10$ とする. 三角形ABCと三角形DEFとに交わらない平面Hと三角柱との交わりが正三角形となるとき, その正三角形の面積を求めよ.

(2) 底面がどのような三角形であっても高さが十分に高ければ, 三角形ABCと三角形DEFとに交わらない平面Hと三角柱との交わりが正三角形となりうることを示せ.

