$\sqrt{n}$の連分数展開に関する考察

北海道真狩高等学校　教諭　髙　倉　　亘

（*Keywords*：**連分数、２次無理数、Lagrange の定理、循環節の回文構造、２次体**）

１　緒　　言

有理係数２次方程式の根になりうる数、すなわち、２次無理数は無限循環連分数に展開される（*Lagrange* の定理）という事実は有名である。本稿では２次無理数の中でも、特に、$\sqrt{n}$ という最も単純な型を有する２次無理数について、その連分数展開の循環節の構造を考察した。$\sqrt{n}$ の連分数展開については、補遺に $n=$２から４００までを計算した結果を載せた。この数表を作成する中で気づいた点について論ずる。

２　連分数展開[1-5]

（１）有理数の連分数展開

連分数

$$q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\dots+\cfrac{1}{q_n}}}}$$

を $[q_0,q_1,q_2,q_3,\dots,q_n]$ と表すことにする。

有理数 $\dfrac{n}{m}$ について、$q_1=\left[\dfrac{n}{m}\right]$、$r_1\equiv n \bmod m$ とすれば、

$$\frac{n}{m}=\frac{q_1m+r_1}{m}=q_1+\frac{r_1}{m}=q_1+\cfrac{1}{\cfrac{m}{r_1}}$$

次に、$q_2=\left[\dfrac{m}{r_1}\right]$、$r_2\equiv m \bmod r_1$ とすれば、

$$\frac{m}{r_1}=\frac{q_2r_1+r_2}{r_1}=q_2+\frac{r_2}{r_1}=q_2+\cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_2}}$$

したがって、$\dfrac{n}{m}=[q_1, q_2, \ldots]$

以下、同様に、$q_{k+1}=\left[\dfrac{r_{k-1}}{r_k}\right]$、$r_{k+1}\equiv r_{k-1} \bmod r_k$

と置き、計算を続けていくと、$m>r_1>r_2>\ldots\geq 0$ と減少する整数列を得るので、

$\exists k$、$s.t.$、$r_k=0$

となる。以上により、次の連分数展開を得る。

$$\frac{n}{m}=[q_1, q_2, \ldots, r_{k-1}]$$

定理１
実数 x が有理数 $\Leftrightarrow$ x は有限な連分数展開を持つ。

（２）無理数の連分数展開

２次無理数に関して、次の定理が知られている。

定理２（*Lagrange* の定理）
２次無理数 $\Leftrightarrow$ 無限循環連分数展開を持つ。

３　２次無理数と循環連分数

（１）２次無理数

定理３

$\alpha\in\mathbb{R}$、$r,s,t,u\in\mathbb{Q}$ $(ru-st\neq 0$、$t\alpha+u\neq 0)$ とし、

$$\beta=\frac{r\alpha+s}{t\alpha+u}$$

が２次無理数ならば、α も２次無理数である。

proof

$$A\beta^2+B\beta+C=0$$

なる、A、B、$C\in\mathbb{Q}$ $(A\neq 0)$ をとると、

$$A(r\alpha+s)^2+B(r\alpha+s)(t\alpha+u)+C(t\alpha+u)^2=0$$

これを整理して、

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0$$

を得る。ただし、

$$a=Ar^2+Brt+Ct^2,$$
$$b=2Ars+B(ru+st)+2Ctu,$$
$$c=As^2+Bsu+Cu^2.$$

これらの式は、

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & 2 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

とまとめることができる。

ここで、明らかに$\alpha \notin \mathbb{Q}$である。いま、仮に、$a=0$であるとすれば、$b\alpha + c = 0$と$\alpha \notin \mathbb{Q}$より、$b=c=0$、したがって、

$$\begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり矛盾する。

よって、$a \neq 0$であって、αも２次無理数である。

q.e.d.

定理４

αを２次無理数、$r,s,t,u \in \mathbb{Q}$ $(ru - st \neq 0)$とするとき、

$$\beta = \frac{r\alpha + s}{t\alpha + u}$$

も２次無理数で、

$$\beta' = \frac{r\alpha' + s}{t\alpha' + u}$$

が、その共役元を与える。ただし、α'はαの共役元である。

proof

まず、$t\alpha + u$、$t\alpha' + u \neq 0$ならびに、$\beta \notin \mathbb{Q}$となることは明らか。また、$\alpha + \alpha'$、$\alpha\alpha' \notin \mathbb{Q}$より、

$$(r\alpha + s)(r\alpha' + s) = r^2\alpha\alpha' + rs(\alpha + \alpha') + s^2,$$
$$(r\alpha + s)(t\alpha' + u) + (r\alpha' + s)(t\alpha + u) = 2rt\alpha\alpha' + (ru + st)(\alpha + \alpha') + 2su,$$
$$(t\alpha + u)(t\alpha' + u) = t^2\alpha\alpha' + tu(\alpha + \alpha') + u^2.$$

これらは、すべて有理数となる。

よって、$\beta + \beta'$、$\beta\beta' \in \mathbb{Q}$となり、主張を得る。

q.e.d.

2次無理数αが簡約2次無理数であるとは、

$$\alpha > 1、\ -1 < \alpha' < 0$$

が成立することをいう。ここで、α'はαの共役元である。例えば、平方数ではない$d \in \mathbb{Z}^+$に対し、$\left[\sqrt{d}\right]+\sqrt{d}$は、簡約2次無理数である。$\left[\sqrt{d}\right]+\sqrt{d}$の共役元は、$\left[\sqrt{d}\right]-\sqrt{d}$であって、これらの数は不等式

$$\left[\sqrt{d}\right]+\sqrt{d} > 1、\ -1 < \left[\sqrt{d}\right]-\sqrt{d} < 0$$

をみたす。

定理5

αを簡約2次無理数とするとき、任意の$i \geq 0$に対し、αのi次全商α_iもまた、簡約2次無理数である。

proof

α_iが簡約2次無理数であるとすると、定理4より、

$$\alpha_{i+1} = \frac{1}{\alpha_i - c_i} = \frac{0 \cdot c_i + 1}{1 \cdot \alpha_i - c_i}$$

も2次無理数で、その共役元は、

$$\alpha'_{i+1} = \frac{1}{\alpha'_i - c_i}$$

で与えられる。ただし、$c_i = \left[\alpha_i\right]$は$\alpha$の$i$次部分商である。ここで、$-1 < \alpha'_i < 0$と$c_i \geq 1$より、$\alpha'_i - c_i < -1$となるから、

$$-1 < \alpha'_{i+1} = \frac{1}{\alpha'_i - c_i} < 0$$

したがって、$\alpha_{i+1} > 1$と合わせて、α_{i+1}も簡約2次無理数となる。仮定より、$\alpha = \alpha_0$は簡約2次無理数であるから、帰納法により主張を得る。

q.e.d.

（2）循環連分数

無限単純連分数$\left[c_0, c_1, c_2, \ldots\right]$が循環連分数であるとは、次をみたすような、$\ell \geq 1$と$n \geq 0$とが存在することをいう。

$$c_{i+\ell} = c_i (i \geq n)$$

ここで、c_n、c_{n+1}、・・・、$c_{n+\ell-1}$を循環節といい、ℓをその長さという。なお、$n = 0$

の場合、すなわち、$c_0 \geq 1$のとき、純循環であるという。

いま，$\alpha = [c_0, c_1, c_2, \ldots]$を純循環な単純連分数で与えられた実数とし、その循環節の長さをℓとすれば、

$$c_{i+\ell} = c_i (i \geq 0)$$

このとき、αのℓ次全商はαに一致するから、

$$\alpha = \frac{p_{\ell-1}\alpha + p_{\ell-2}}{q_{\ell-1}\alpha + q_{\ell-2}}$$

ただし、p_i、q_iはそれぞれαのi次近似分子、近似分母を表す。これより、

$$q_{\ell-1}\alpha^2 - (p_{\ell-1} - q_{\ell-2})\alpha - p_{\ell-2} = 0$$

となり、αは$\mathbb{Z}^-$係数の２次式

$$f(x) = q_{\ell-1}x^2 - (p_{\ell-1} - q_{\ell-2})x - p_{\ell-2}$$

の根となる（ただし、$q_{\ell-2} \geq 1$）。よって、αは２次無理数となる。

また、c_0、c_1、c_2、・・・$\in \mathbb{Z}^+$と$\ell \geq 1$より、

$$0 < p_{\ell-2} \leq p_{\ell-1}、0 \leq q_{\ell-2} \leq q_{\ell-1}$$

となるので、

$$f(0) = -p_{\ell-2} < 0、f(-1) = (p_{\ell-1} - p_{\ell-2}) + (q_{\ell-1} - q_{\ell-2}) \geq 0$$

これより、αの共役元α'は不等式

$$-1 < \alpha' < 0$$

をみたす。$\alpha > c_0 \geq 1$であるため、αは簡約２次無理数となる。更に、αは、

$$\alpha = \frac{p_{\ell-1} - q_{\ell-2} + \sqrt{(p_{\ell-1} - q_{\ell-2})^2 + 4p_{\ell-2}q_{\ell-1}}}{2q_{\ell-1}}$$

となる。

ここで、$a \in \mathbb{Z}^+$に対し、$\alpha = [a, a, a, \ldots, a, \ldots]$と置くと、

$$\alpha = a + \frac{1}{\alpha} = \frac{a\alpha + 1}{\alpha}$$

したがって、

$$\alpha^2 - a\alpha - 1 = 0$$

となり、

$$\alpha = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

となる。

次に、$\alpha=[c_0,c_1,c_2,\ldots]$ を循環単純連分数とし、

$$c_{i+\ell}=c_i(i\geq n)$$

とする。このとき、α の n 次全商の単純連分数展開

$$\alpha_n=[c_n,c_{n+1},c_{n+2},\ldots]$$

は純循環であるから、α_n は簡約２次無理数である。したがって、α は２次無理数である。以上をまとめると次のようになる。

定理６

（１）循環単純連分数で与えられる実数は２次無理数である。

（２）純循環な単純連分数で与えられる実数は簡約２次無理数である。

（３）２次無理数の連分数展開

定理６の逆を示す。

定理７

（１）２次無理数は循環単純連分数に展開される。

（２）簡約２次無理数は純循環な単純連分数に展開される。

（1）の *proof*

α を２次無理数とすると、

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0$$

となるような、a、b、$c\in\mathbb{Z}$ $(a\neq 0)$ がとれる。各 $i\geq 0$ に対し、

$$\alpha=\frac{p_{i-1}\alpha_i+p_{i-2}}{q_{i-1}\alpha_i+q_{i-2}}$$

より、

$$a_i\alpha_i{}^2+b_i\alpha_i+c_i=0$$

が得られる。ここで、a_i、b_i、$c_i(a_i\neq 0)$ は、

$$a_i=ap_{i-1}^2+bp_{i-1}q_{i-1}+cq_{i-1}^2$$
$$b_i=2ap_{i-1}p_{i-2}+b(p_{i-1}q_{i-2}+p_{i-2}q_{i-1})+2cq_{i-1}q_{i-2}$$
$$c_i=ap_{i-2}^2+bp_{i-2}q_{i-2}+cq_{i-2}^2$$

すなわち、

$$\begin{pmatrix} a_i & \frac{b_i}{2} \\ \frac{b_i}{2} & c_i \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} p_{i-1} & p_{i-2} \\ q_{i-1} & q_{i-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{i-1} & p_{i-2} \\ q_{i-1} & q_{i-2} \end{pmatrix}$$

により定まる有理整数である。ここで、$i \geq 1$ならば、

$$\frac{a_i}{q_{i-1}^2} = a\left(\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}\right)^2 + b\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} + c - (a\alpha^2 + b\alpha + c)$$

$$= 2a\alpha\left(\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} - \alpha\right) + a\left(\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} - \alpha\right)^2 + b\left(\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} - \alpha\right)$$

となるから、

$$\left|\frac{a_i}{q_{i-1}^2}\right| \leq 2|a\alpha|\frac{1}{q_{i-1}^2} + |a|\frac{1}{q_{i-1}^4} + |b|\frac{1}{q_{i-1}^2}$$

よって、任意の$i \geq 1$に対して、

$$|a_i| \leq 2|a\alpha| + |a| + |b|$$

が成立する。同様に、任意の$i \geq 2$に対して、

$$|c_i| \leq 2|a\alpha| + |a| + |b|$$

が成立する。また、

$$b_i^2 - 4a_ic_i = -4\begin{vmatrix} a_i & \frac{b_i}{2} \\ \frac{b_i}{2} & c_i \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = b^2 - 4ac$$

は、$i \geq 0$によらずに一定であるから、任意の$i \geq 2$に対して、

$$b_i^2 = 4a_ic_i + b^2 - 4ac \leq 4(2|a\alpha| + |a| + |b|)^2 + b^2 - 4ac$$

が成立する。以上より、

$${}^t(a_0, b_0, c_0)、{}^t(a_1, b_1, c_1)、{}^t(a_2, b_2, c_2)\ldots \in \mathbb{Z}^3$$

は有界な点列となり、

$${}^t(a_{i1}, b_{i1}, c_{i1}) = {}^t(a_{i2}, b_{i2}, c_{i2}) = {}^t(a_{i3}, b_{i3}, c_{i3}) = \ldots..(0 \leq i_1 < i_2 < i_3 < \ldots)$$

となるような、i_1、i_2、i_3…が存在する。このとき、α_{i1}、α_{i2}、α_{i3}は同一の２次

式の根であるから、そのうち、少なくとも２つは一致し、主張は得られる。

q.e.d.

（２）の *proof*

α を簡約２次無理数とし、その i 次全商、部分商をそれぞれ α_i、c_i とする。このとき、（１）より、$\alpha_{n+\ell}=\alpha_n$ となるような、$n\geq 0$ と $\ell\geq 1$ とがとれる。ここで、$n\geq 1$ であるとすれば、

$$\alpha_{n-1}=c_{n-1}+\frac{1}{\alpha_n}、\ \alpha_{n+\ell-1}=c_{n+\ell-1}+\frac{1}{\alpha_{n+\ell}}$$

より、

$$\alpha_{n-1}-\alpha_{n+\ell-1}=c_{n-1}-c_{n+\ell-1}$$

したがって、定理４より、

$$\alpha'_{n-1}-\alpha'_{n+\ell-1}=c_{n-1}-c_{n+\ell-1}$$

となる。ここで、α'_i は α_i の共役元を表す。定理５より、各 α_i は簡約２次無理数であるから、不等式 $-1<\alpha'_i<0$ をみたす。これより、

$$\left|c_{n-1}-c_{n+\ell-1}\right|=\left|\alpha'_{n-1}-\alpha'_{n+\ell-1}\right|<1$$

なる不等式が得られる。ここで、$c_i\in\mathbb{Z}$ であったから、$c_{n+\ell-1}=c_{n-1}$ となり、$\alpha_{n+\ell-1}=\alpha_{n-1}$ であることがわかる。以上の操作を繰り返すことにより、

$$\alpha_\ell=\alpha_0=\alpha$$

となる。

q.e.d.

4　$\sqrt{n}$ の連分数展開

この章では、２次無理数の中で最も単純な型である $\sqrt{n}$ について、連分数展開したものの特徴について考察する。

> **定理８**
>
> $\left[\sqrt{n}\right]=m$ とすると、$\sqrt{n}$ の連分数展開は、第２成分から循環節が始まる。すなわち、$\sqrt{n}=\left[m,\overline{q_1,q_2,\ldots,q_k}\right]$ であり、更に、循環節の最終項 q_k は $2m$ に等しい。

proof

平方数でない $n\in\mathbb{Z}^+$ に対し、$\left[\sqrt{n}\right]+\sqrt{n}$ は、簡約２次無理数であるから、

$\left[\sqrt{n}\right]+\sqrt{n}$ は、純循環な単純連分数に展開される。

$$\left[\sqrt{n}\right]+\sqrt{n}=\left[q'_0,q_1,\dots,q_{\ell-1},q'_0,q_1,\dots,q_{\ell-1},\dots\right]\left(q'_0,q_1,\dots,q_{\ell-1}\in\mathbb{Z}^+\right)$$

ここで、$\left[\sqrt{n}\right]=m$ とおけば、$q'_0=\left[\left[\sqrt{n}\right]+\sqrt{n}\right]=2m$

したがって、$m+\sqrt{n}=\left[2m,q_1,\dots,q_{\ell-1},2m,q_1,\dots,q_{\ell-1},\dots\right]$

となり、$\sqrt{n}$ の単純連分数展開は次のようになる。

$$\sqrt{n}=\left[m,q_1,\dots,q_{\ell-1},2m,q_1,\dots,q_{\ell-1},2m,\dots\right](q_1,\dots,q_{\ell-1},2m\text{ が循環節})$$

q.e.d.

定理９

$\sqrt{n}$ の連分数展開について、

$q_1=\left[\sqrt{n}\right]$、$r_1=\sqrt{n}-q_1$、$\ell_1=1$、$m_1=q_1$、

$$\ell_{k+1}=\frac{n-m_k{}^2}{\ell_k}、\quad q_{k+1}=\left[\frac{\sqrt{n}+m_k}{\ell_{k+1}}\right]、$$

$$m_{k+1}=\ell_{k+1}q_{k+1}-m_k$$

により、整数列$\{q_k\}$を定めていくと、

$$\sqrt{n}=\left[q_1,q_2,\dots,q_k,\dots\right]$$

のように、連分数展開される。また、

$$r_k=\frac{\sqrt{n}-m_k}{\ell_k}$$

と表わされる。

proof

$$r_k=\frac{\sqrt{n}-m_k}{\ell_k}(\ell_k,m_k\in\mathbb{Z})\ ・・・①$$

$k=1$のときは、$r_1=\sqrt{n}-q_1$ より明らか。

$r_k = \dfrac{\sqrt{n} - m_k}{\ell_k}$ が成立するものと仮定すると、

$$\frac{1}{r_k} = \frac{\ell_k}{\sqrt{n} - m_k} = \frac{\ell_k(\sqrt{n} + m_k)}{n - m_k^2}$$

したがって、①が成立することは、$\ell_k \left| n - m_k^2 \right.$ と同値である。

また、$k = 1$ のときは、$\ell_1 = 1$ より、$\ell_1 \left| n - m_1^2 \right.$ である。

$\ell_k \left| n - m_k^2 \right.$ が成立するものと仮定すると、

$$\ell_{k+1} = \frac{n - m_k^2}{\ell_k}$$

とおくと、

$$\frac{1}{r_k} = \frac{\ell_k(\sqrt{n} + m_k)}{\ell_k \ell_{k+1}} = \frac{\sqrt{n} + m_k}{\ell_{k+1}}$$

$$q_{k+1} = \left[\frac{\sqrt{n} + m_k}{\ell_{k+1}} \right]$$

$$r_{k+1} = \frac{1}{r_k} - q_{k+1} = \frac{\sqrt{n} + m_k}{\ell_{k+1} - q_{k+1}} = \frac{\sqrt{n} - (\ell_{k+1} q_{k+1} - m_k)}{\ell_{k+1}}$$

したがって、$m_{k+1} = \ell_{k+1} - m_k$ とおけば、

$$r_{k+1} = \frac{\sqrt{n} - m_{k+1}}{\ell_{k+1}}$$

とできる。更に、

$$n - m_{k+1}^2 = n - (\ell_{k+1} q_{k+1} - m_k)^2$$

$$= (n - m_k)^2 - \ell_{k+1}(\ell_{k+1} q_{k+1}^2 - 2 m_k q_{k+1})$$

$$= \ell_{k+1} \ell_k - \ell_{k+1}(\ell_{k+1} q_{k+1}^2 - 2 m_k q_{k+1})$$

したがって、ℓ_{k+1} も $n - m_{k+1}^2$ を割り切れるように定めることができる。

q.e.d.

更に、ℓ_k、m_kは正の整数であることを示す。その結果、$\sqrt{n}$は循環連分数展開を持つことがいえる。

補題１　$\ell_k > 0$、$m_k > 0$

proof

$\ell_1 = 1 > 0$、$m_1 = q_1 = \left[\sqrt{n}\right] > 0$、$\ell_k > 0$、$m_k > 0$と仮定すると、

$$r_k = \frac{1}{r_{k-1}} - \left[\frac{1}{r_{k-1}}\right] > 0$$

であり、一方、$r_k = \dfrac{\sqrt{n} - m_k}{\ell_k}$であるから、$\sqrt{n} - m_k > 0$

また、仮定から、$m_k > 0$

したがって、$n - m_k^2 > 0$

よって、$\ell_{k+1} = \dfrac{n - m_k^2}{\ell_k} > 0$

$m_{k+1} = \ell_{k+1} q_{k+1} - m_k$において、$\ell_{k+1} = \dfrac{n - m_k^2}{\ell_k} = \dfrac{\sqrt{n} - m_k}{\ell_k}(\sqrt{n} + m_k) = r_k(\sqrt{n} + m_k)$

$r_k = \dfrac{\sqrt{n} - m_k}{\ell_k}$より、$\sqrt{n} = \ell_k r_k + m_k$

よって、$\ell_{k+1} = r_k(\ell_k r_k + 2m_k) q_{k+1} - m_k = (2r_k q_{k+1} - 1)m_k + \ell_k r_k^2 q_{k+1}$

ここで、$q_{k+1} = \left[\dfrac{1}{r_k}\right] \geq 1$より、$q_{k+1} \leq \dfrac{1}{r_k} < q_{k+1} + 1$だから、$\dfrac{1}{q_{k+1}} \geq r_k > \dfrac{1}{q_{k+1} + 1}$

したがって、$2r_k q_{k+1} - 1 > \dfrac{2q_{k+1}}{q_{k+1} + 1} - 1 = \dfrac{q_{k+1} - 1}{q_{k+1} + 1} \geq 0$

これより、$m_{k+1} > 0$

ゆえに、$\forall k$、$\ell_k > 0$、$m_k > 0$

q.e.d.

定理１０

$\sqrt{n}$ は循環連分数に展開される。

proof

補題１より、ℓ_k、m_k は自然数で、条件

$$n-m_k>0、\ell_k \left| n-m_k^2 \right.$$

をみたす。このような自然数の組$(\ell_k,\ m_k)$は有限個しか存在しない。

ゆえに、$r_k=\dfrac{\sqrt{n}-m_k}{\ell_k}$ は、有限個の異なる値しか取り得ない。

すなわち、$\sqrt{n}$ の連分数展開は循環する。

q.e.d.

補遺に示した、$\sqrt{n}$ の連分数展開を見ると、次に示す、定理１１、定理１２、定理１３、定理１４などが成立することがわかる。

定理１１

$\sqrt{n}$ の連分数展開の循環節の長さが１ $\Leftrightarrow$ $n=m^2+1$

このとき、連分数展開は、$\sqrt{m^2+1}=\left[m,\overline{2m}\right](m\geq 1)$ となる。

proof

ｉ）循環節の長さが１であるとき、$\sqrt{n}=\left[m,\overline{k}\right]$とおけば、

$$\sqrt{n}=m+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\ldots+\cfrac{1}{k}}}}$$

ここで、

$$k+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\ldots+\cfrac{1}{k}}}=x$$

とおけば、

$$x=k+\frac{1}{x}、すなわち、x^2-kx-1=0$$

$x>0$ だから、

$$x=\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$$

したがって、

$$\sqrt{n}=m+\frac{1}{x}=m+\frac{2}{k+\sqrt{k^2+4}}=m+\frac{-k+\sqrt{k^2+4}}{2}=\frac{(2m-k)+\sqrt{k^2+4}}{2}$$

よって、$k=2m$、$\sqrt{n}=\dfrac{\sqrt{k^2+4}}{2}=\sqrt{m^2+1}$

ゆえに、$n=m^2+1$

ii）$n=m^2+1$ のとき、$m^2<m^2+1<(m+1)^2$ より、

$\left[\sqrt{n}\right]=m$ とおけば、

$$\sqrt{m^2+1}=m+(\sqrt{m^2+1}-m)$$

$$=m+\frac{1}{\sqrt{m^2+1}+m}$$

また、$\left[\sqrt{m^2+1}+m\right]=2m$ だから、

$$\sqrt{m^2+1}+m=2m+(\sqrt{m^2+1}-m)$$

$$=2m+\frac{1}{\sqrt{m^2+1}+m}$$

したがって、$\sqrt{m^2+1}=\left[m,\overline{2m}\right]$

q.e.d.

定理１２

（１）$\sqrt{m^2+2}=\left[m,\overline{m,2m}\right](m\geq 1)$

（２）$\sqrt{m^2-1}=\left[m-1,\overline{1,2(m-1)}\right](m\geq 2)$

（３）$\sqrt{m(m+1)}=\left[m,\overline{2,2m}\right](m\geq 2)$

（４）$\sqrt{m^2-2}=\left[m-1,\overline{1,m-2,1,2(m-1)}\right](m\geq 3)$

（1）の *proof*

$\left[\sqrt{m^2+2}\right]=m$ より、

$$\sqrt{m^2+2}=m+(\sqrt{m^2+2}-m)$$

$$=m+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{m^2+2}+m}{2}}$$

$2m<\sqrt{m^2+2}+m<2m+1$ だから、$\left[\dfrac{\sqrt{m^2+2}+m}{2}\right]=m$ なので、

$$\frac{\sqrt{m^2+2}+m}{2}=m+\left(\frac{\sqrt{m^2+2}+m}{2}-m\right)$$

$$=m+\frac{1}{\sqrt{m^2+2}+m}$$

また、$\left[\sqrt{m^2+2}+m\right]=2m$ だから、

$$\sqrt{m^2+2}+m=2m+(\sqrt{m^2+2}+m-2m)$$

$$=2m+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{m^2+2}+m}{2}}$$

先程と同じ残余が現れたので、以降、循環する。

q.e.d.

（2）の *proof*

$\left[\sqrt{m^2-1}\right]=m-1$ より、

$$\sqrt{m^2-1}=(m-1)+(\sqrt{m^2-1}-(m-1))$$

$$=(m-1)+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{m^2-1}+(m-1)}{2(m-1)}}$$

$2(m-1)<\sqrt{m^2-1}+(m-1)<2(m-1)+1$ だから、$\left[\dfrac{\sqrt{m^2-1}+(m-1)}{2(m-1)}\right]=1$ なので、

$$\frac{\sqrt{m^2-1}+(m-1)}{2(m-1)}=1+\left(\frac{\sqrt{m^2-1}+(m-1)}{2(m-1)}-1\right)$$

$$=1+\frac{1}{\sqrt{m^2-1}+(m-1)}$$

また、$\left[\sqrt{m^2-1}+(m-1)\right]=2(m-1)$ だから、

$$\sqrt{m^2-1}+(m-1)=2(m-1)+(\sqrt{m^2-1}+(m-1)-2(m-1))$$

$$=2(m-1)+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{m^2-1}+(m-1)}{2(m-1)}}$$

先程と同じ残余が現れたので、以降、循環する。

q.e.d.

（3）の *proof*

$\left[\sqrt{m(m+1)}\right]=m$ より、

$$\sqrt{m(m+1)}=m+(\sqrt{m(m+1)}-m)$$

$$=m+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{m(m+1)}+m}{m}}$$

$2m < \sqrt{m(m+1)} + m < 2m+1$ だから、$\left[\dfrac{\sqrt{m(m+1)}+m}{m}\right] = 2$ なので、

$$\frac{\sqrt{m(m+1)}+m}{m} = 2 + \left(\frac{\sqrt{m(m+1)}+m}{m} - 2\right)$$

$$= 2 + \frac{1}{\sqrt{m(m+1)}+m}$$

また、$\left[\sqrt{m(m+1)}+m\right] = 2m$ だから、

$$\sqrt{m(m+1)} + m = 2m + (\sqrt{m(m+1)} + m - 2m)$$

$$= 2m + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{m(m+1)}+m}{m}}$$

先程と同じ残余が現れたので、以降、循環する。

q.e.d.

（4）の ***proof***

$\left[\sqrt{m^2-2}\right] = m-1$ より、

$$\sqrt{m^2-2} = (m-1) + (\sqrt{m^2-2} - (m-1))$$

$$= (m-1) + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{m^2-2}+(m-1)}{2(m-1)-1}}$$

$2(m-1) < \sqrt{m^2-2} + (m-1) < 2(m-1)+1$ だから、$\left[\dfrac{\sqrt{m^2-2}+(m-1)}{2(m-1)-1}\right] = 1$ なので、

$$\frac{\sqrt{m^2-2}+(m-1)}{2(m-1)-1} = 1 + \left(\frac{\sqrt{m^2-2}+(m-1)}{2(m-1)-1} - 1\right)$$

$$= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{m^2-2}+(m-2)}{2}}$$

$2(m-1)-1<\sqrt{m^2-2}+(m-2)<2(m-1)$ だから、$\left[\dfrac{\sqrt{m^2-2}+(m-2)}{2}\right]=m-2$ なので、

$$\frac{\sqrt{m^2-2}+(m-2)}{2}=(m-2)+\left(\frac{\sqrt{m^2-2}+(m-2)}{2}-(m-2)\right)$$

$$=(m-2)+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{m^2-2}+(m-2)}{2(m-1)-1}}$$

また、$\left[\dfrac{\sqrt{m^2-2}+(m-2)}{2(m-1)-1}\right]=1$ だから、

$$\frac{\sqrt{m^2-2}+(m-2)}{2(m-1)-1}=1+\left(\frac{\sqrt{m^2-2}+(m-2)}{2(m-1)-1}-1\right)$$

$$=1+\frac{1}{\sqrt{m^2-2}+(m-1)}$$

また、$\left[\sqrt{m^2-2}+(m-1)\right]=2(m-1)$ だから、

$$\sqrt{m^2-2}+(m-1)=2(m-1)+(\sqrt{m^2-2}+(m-1)-2(m-1))$$

$$=2(m-1)+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{m^2-2}+(m-1)}{2(m-1)-1}}$$

先程と同じ残余が現れたので、以降、循環する。

q.e.d.

定理１３
$\sqrt{n}$ の連分数展開における循環節において、循環部の最終項を除いた部分は、回文構造を有する。すなわち、

$$\sqrt{n}=\left[q_0,\overline{q_1,q_2,q_3,...,q_3,q_2,q_1,2q_0}\right]$$

proof

$\omega=\sqrt{n}-q_0$ とおくと、

$$\omega=\frac{1}{\left[q_1,q_2,...,q_{\ell-2},q_{\ell-1},2q_0\right]}$$

であるから、ω は次の X に関する２次方程式を満たす。

$$X=\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cdots\cfrac{1}{2q_0+X}}}$$

このとき、

$$\eta=\left[\overline{-q_\ell,-q_{\ell-1},...,-q_2,-q_1}\right]$$

とおく。ただし、$q_\ell=2q_0$ とする。
さて、任意の整数 i に対して、
$i\equiv i'\bmod\ell$、$1\le i'\le\ell$
となる i' をとり、$n_i=q_{i'}$ と定める。すべての整数 i に対して、

$$x_i=\frac{1}{\left[\overline{-n_{i-1},-n_{i-2},...,-n_{i-\ell}}\right]}$$

とおく。このとき、$x_1=\dfrac{1}{\eta}$ であることに注意する。
さて、

$$\frac{1}{x_{i+1}}=\left[\overline{-n_i,-n_{i-1},-n_{i-2},...,-n_{i-\ell}}\right]$$

$$=-n_i+\frac{1}{\left[\overline{-n_{i-1},-n_{i-2},...,-n_{i-\ell}}\right]}$$

$$=-n_i+x_i$$

だから、

$$x_i = n_i + \frac{1}{x_{i+1}}$$

特に、

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{1}{x_1} \\
&= \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{x_2}} \\
&= \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \dots \cfrac{1}{q_\ell + \cfrac{1}{x_1}}}} \\
&= \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \dots + \cfrac{1}{2q_0 + \eta}}}
\end{aligned}$$

となり、η は ω と同じ 2 次方程式を満たす。$\eta < 0$ だから、η は ω の共役 $-\sqrt{n} - q_0$ に等しい。よって、

$$\sqrt{n} + q_0 = 2q_0 + \cfrac{1}{q_{\ell-1} + \dots \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\sqrt{n} + q_0}}}$$

これは、

$$\sqrt{n} = \left[q_0, \overline{q_{\ell-1}, q_{\ell-2}, \dots, q_2, q_1, 2q_0} \right]$$

を意味する。

q.e.d.

定理１４

$\sqrt{n}$ の連分数展開において、$q_0 < \sqrt{n} < q_0+1$、$\sqrt{n} = \left[q_0, \overline{q_1, 2q_0}\right]$ となるもの、すなわち、循環節の長さが２のものについて、q_1 は $2q_0$ の正の約数（ただし、$2q_0$ は除く）である。逆に、q_0 を任意に与えたとき、$2q_0$ の正の約数 q_1 に対して、$q_0 < \sqrt{n} < q_0+1$、$\sqrt{n} = \left[q_0, \overline{q_1, 2q_0}\right]$ となる正の非平方数 n が唯一つ存在する。

proof

仮定より、

$$\sqrt{n} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{2q_0 + \sqrt{n} - q_0}}$$

であるから、これをまとめると、

$$\sqrt{n} = \frac{q_0^2 q_1 + 2q_0 + (q_0 q_1 + 1)\sqrt{n}}{q_0 q_1 + 1 + q_1\sqrt{n}}$$

となり、n が非平方数であることに注意すると、

$$q_1 n = q_0^2 q_1 + 2q_0$$

すなわち、

$$q_1(n - q_0^2) = 2q_0$$

を得る。これは、q_1 が $2q_0$ の正の約数であることを示す。

逆に、$2q_0$ の正の約数 q_1 に対して、

$$n = \frac{q_0^2 q_1 + 2q_0}{q_1}$$

とおくと、明らかに、

$$q_0 < \sqrt{n} < q_0 + 1$$

であり、上の議論を逆に辿ると、

$$\sqrt{n} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{2q_0 + \sqrt{n} - q_0}}$$

となり、必要条件をみたす。また、一意性は明らかである。

q.e.d.

5　結　　言

$\sqrt{n}$ の連分数展開に関しては、本文に挙げたもの以外にも面白い性質が隠れているものと思われる。例えば、*D.B.Zagier*の文献[6] には、連分数の循環節の長さと２次体の類数について興味深い結果が紹介されている。しかしながら、体系的な解説にはなっていないので、今後の考察すべき対象となるだろう。また、２次体の２次形式論とイデアル論とは、ほぼ同等なものと考えられているが、*Pell's equation*を解く場合には、通常、連分数展開を用いて、実２次体の単数を求める問題に帰着される。これは、２次形式論的な解法であり、イデアル論的に解決できないかという疑問もある。イデアル論はこの単数の差を無視して構成されているため、従来、２次形式論とは直接的な関係はないものと考えられていたが、最近の研究では類数と単数との微妙な関係が発見されているとのことである。[7] これらのことに関しても今後の研究課題としたい。

謝　　辞

本稿を書くにあたり、室蘭工業大学 教授 桂田英典 氏からは有益な私信をいただきました。また、札幌市在住 数学愛好家 新城浩一 氏との議論は本稿執筆のきっかけとなり、有益な意見もいただきました。この場を借りてお礼申し上げます。

参 考 文 献

１）高木貞治「初等整数論講義」共立出版.
２）河田敬義「数論」岩波書店.
３）小野　孝「数論序説」裳華房.
４）G.H.Hardy, E.M.Wright「*An Introduction to the Theory of Numbers*」Oxford University Press.
５）W.J.Leveque「*Topics in number theory*」Dover.
６）D.B.Zagier「*Zetafunktionen und quadratische korper*」Springer-Verlag.
７）桂田英典　私信.

＜　補　遺　＞　$\sqrt{n}$ の連分数展開（$n=2\sim400$：循環節は q_1 以降）

（1）　$n=2\sim50$

n	q0	q1	q2	q3	q4	q5	q6	q7	q8	q9	q10	q11	q12	q13	q14	q15	q16	q17	q18	q19	q20	q21	q22	q23	q24	q25	q26	q27	q28	q29	q30	q31	q32	q33	q34	q35
2	1	2																																	
3	1	1	2																																
4	2	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##
5	2	4																																	
6	2	2	4																																
7	2	1	1	1	4																														
8	2	1	4																																
9	3	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##
10	3	6																																	
11	3	3	6																																
12	3	2	6																																
13	3	1	1	1	1	6																													
14	3	1	2	1	6																														
15	3	1	6																																
16	4	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##
17	4	8																																	
18	4	4	8																																
19	4	2	1	3	1	2	8																												
20	4	2	8																																
21	4	1	1	2	1	1	8																												
22	4	1	2	4	2	1	8																												
23	4	1	3	1	8																														
24	4	1	8																																
25	5	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##
26	5	10																																	
27	5	5	10																																
28	5	3	2	3	10																														
29	5	2	1	1	2	10																													
30	5	2	10																																
31	5	1	1	3	5	3	1	1	10																										
32	5	1	1	1	10																														
33	5	1	2	1	10																														
34	5	1	4	1	10																														
35	5	1	10																																
36	6	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##
37	6	12																																	
38	6	6	12																																
39	6	4	12																																
40	6	3	12																																
41	6	2	2	12																															
42	6	2	12																																
43	6	1	1	3	1	5	1	3	1	1	12																								
44	6	1	1	1	2	1	1	1	12																										
45	6	1	2	2	2	1	12																												
46	6	1	3	1	1	2	6	2	1	1	3	1	12																						
47	6	1	5	1	12																														
48	6	1	12																																
49	7	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##
50	7	14																																	

（2） $n=51\sim100$

n	$q0$	$q1$	$q2$	$q3$	$q4$	$q5$	$q6$	$q7$	$q8$	$q9$	$q10$	$q11$	$q12$	$q13$	$q14$	$q15$	$q16$	$q17$	$q18$	$q19$	$q20$	$q21$	$q22$	$q23$	$q24$	$q25$	$q26$	$q27$	$q28$	$q29$	$q30$	$q31$	$q32$	$q33$	$q34$	$q35$
51	7	7	14
52	7	4	1	2	1	4	14
53	7	3	1	1	3	14
54	7	2	1	6	1	2	14
55	7	2	2	2	14
56	7	2	14
57	7	1	1	4	1	1	14
58	7	1	1	1	1	1	1	14
59	7	1	2	7	2	1	14
60	7	1	2	1	14
61	7	1	4	3	1	2	2	1	3	4	1	14
62	7	1	6	1	14
63	7	1	14
64	8	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##
65	8	16
66	8	8	16
67	8	5	2	1	1	7	1	1	2	5	16
68	8	4	16
69	8	3	3	1	4	1	3	3	16
70	8	2	1	2	1	2	16
71	8	2	2	1	7	1	2	2	16
72	8	2	16
73	8	1	1	5	5	1	1	16
74	8	1	1	1	1	16
75	8	1	1	1	16
76	8	1	2	1	1	5	4	5	1	1	2	1	16
77	8	1	3	2	3	1	16
78	8	1	4	1	16
79	8	1	7	1	16
80	8	1	16
81	9	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##
82	9	18
83	9	9	18
84	9	6	18
85	9	4	1	1	4	18
86	9	3	1	1	1	8	1	1	1	3	18
87	9	3	18
88	9	2	1	1	1	2	18
89	9	2	3	3	2	18
90	9	2	18
91	9	1	1	5	1	5	1	1	18
92	9	1	1	2	4	2	1	1	18
93	9	1	1	1	4	6	4	1	1	1	18
94	9	1	2	3	1	1	5	1	8	1	5	1	1	3	2	1	18
95	9	1	2	1	18
96	9	1	3	1	18
97	9	1	5	1	1	1	1	1	1	5	1	18
98	9	1	8	1	18
99	9	1	18
100	10	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##

（3） $n = 101 \sim 150$

n	*q0*	*q1*	*q2*	*q3*	*q4*	*q5*	*q6*	*q7*	*q8*	*q9*	*q10*	*q11*	*q12*	*q13*	*q14*	*q15*	*q16*	*q17*	*q18*	*q19*	*q20*	*q21*	*q22*	*q23*	*q24*	*q25*	*q26*	*q27*	*q28*	*q29*	*q30*	*q31*	*q32*	*q33*	*q34*	*q35*
101	10	20																																		
102	10	10	20																																	
103	10	6	1	2	1	1	9	1	1	2	1	6	20																							
104	10	5	20																																	
105	10	4	20																																	
106	10	3	2	1	1	1	1	2	3	20																										
107	10	2	1	9	1	2	20																													
108	10	2	1	1	4	1	1	2	20																											
109	10	2	3	1	2	4	1	6	6	1	4	2	1	3	2	20																				
110	10	2	20																																	
111	10	1	1	6	1	1	20																													
112	10	1	1	2	1	1	20																													
113	10	1	1	1	2	2	1	1	1	20																										
114	10	1	2	10	2	1	20																													
115	10	1	2	1	1	1	1	1	2	1	20																									
116	10	1	3	2	1	4	1	2	3	1	20																									
117	10	1	4	2	4	1	20																													
118	10	1	6	3	2	10	2	3	6	1	20																									
119	10	1	9	1	20																															
120	10	1	20																																	
121	11	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##
122	11	22																																		
123	11	11	22																																	
124	11	7	2	1	1	1	3	1	4	1	3	1	1	1	2	7	22																			
125	11	5	1	1	5	22																														
126	11	4	2	4	22																															
127	11	3	1	2	2	7	11	7	2	2	1	3	22																							
128	11	3	5	3	22																															
129	11	2	1	3	1	6	1	3	1	2	22																									
130	11	2	2	22																																
131	11	2	4	11	4	2	22																													
132	11	2	22																																	
133	11	1	1	7	5	1	1	1	2	1	1	1	5	7	1	1	22																			
134	11	1	1	2	1	3	1	10	1	3	1	2	1	1	22																					
135	11	1	1	1	1	1	1	1	22																											
136	11	1	1	1	22																															
137	11	1	2	2	1	1	2	2	1	22																										
138	11	1	2	1	22																															
139	11	1	3	1	3	7	1	1	2	11	2	1	1	7	3	1	3	1	22																	
140	11	1	4	1	22																															
141	11	1	6	1	22																															
142	11	1	10	1	22																															
143	11	1	22																																	
144	12	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##
145	12	24																																		
146	12	12	24																																	
147	12	8	24																																	
148	12	6	24																																	
149	12	4	1	5	3	3	5	1	4	24																										
150	12	4	24																																	

（4） $n = 151 \sim 200$

n	q0	q1	q2	q3	q4	q5	q6	q7	q8	q9	q10	q11	q12	q13	q14	q15	q16	q17	q18	q19	q20	q21	q22	q23	q24	q25	q26	q27	q28	q29	q30	q31	q32	q33	q34	q35
151	12	3	2	7	1	3	4	1	1	1	11	1	1	1	4	3	1	7	2	3	24															
152	12	3	24																																	
153	12	2	1	2	2	2	1	2	24																											
154	12	2	2	3	1	2	1	3	2	2	24																									
155	12	2	4	2	24																															
156	12	2	24																																	
157	12	1	1	7	1	5	2	1	1	1	1	2	5	1	7	1	1	24																		
158	12	1	1	3	12	3	1	1	24																											
159	12	1	1	1	1	3	1	1	1	1	24																									
160	12	1	1	1	5	1	1	1	24																											
161	12	1	2	4	1	2	1	4	2	1	24																									
162	12	1	2	1	2	12	2	1	2	1	24																									
163	12	1	3	3	2	1	1	7	1	11	1	7	1	1	2	3	3	1	24																	
164	12	1	4	6	4	1	24																													
165	12	1	5	2	5	1	24																													
166	12	1	7	1	1	1	2	4	1	3	2	12	2	3	1	4	2	1	1	1	7	1	24													
167	12	1	11	1	24																															
168	12	1	24																																	
169	13	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##
170	13	26																																		
171	13	13	26																																	
172	13	8	1	2	2	1	1	3	6	3	1	1	2	2	1	8	26																			
173	13	6	1	1	6	26																														
174	13	5	4	5	26																															
175	13	4	2	1	2	4	26																													
176	13	3	1	3	26																															
177	13	3	3	2	8	2	3	3	26																											
178	13	2	1	12	1	2	26																													
179	13	2	1	1	1	3	5	13	5	3	1	1	1	2	26																					
180	13	2	2	2	26																															
181	13	2	4	1	8	6	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	6	8	1	4	2	26														
182	13	2	26																																	
183	13	1	1	8	1	1	26																													
184	13	1	1	3	2	1	2	1	2	3	1	1	26																							
185	13	1	1	1	1	26																														
186	13	1	1	1	3	4	3	1	1	1	26																									
187	13	1	2	13	2	1	26																													
188	13	1	2	2	6	2	2	1	26																											
189	13	1	2	1	26																															
190	13	1	3	1	1	1	2	2	2	1	1	1	3	1	26																					
191	13	1	4	1	1	3	2	2	13	2	2	3	1	1	4	1	26																			
192	13	1	5	1	26																															
193	13	1	8	3	2	1	3	3	1	2	3	8	1	26																						
194	13	1	12	1	26																															
195	13	1	26																																	
196	14	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##
197	14	28																																		
198	14	14	28																																	
199	14	9	2	1	2	2	5	4	1	1	13	1	1	4	5	2	2	1	2	9	28															
200	14	7	28																																	

（5） $n = 201 \sim 250$

n	*q0*	*q1*	*q2*	*q3*	*q4*	*q5*	*q6*	*q7*	*q8*	*q9*	*q10*	*q11*	*q12*	*q13*	*q14*	*q15*	*q16*	*q17*	*q18*	*q19*	*q20*	*q21*	*q22*	*q23*	*q24*	*q25*	*q26*	*q27*	*q28*	*q29*	*q30*	*q31*	*q32*	*q33*	*q34*	*q35*
201	14	5	1	1	1	2	1	8	1	2	1	1	1	5	28																					
202	14	4	1	2	2	1	4	28																												
203	14	4	28																																	
204	14	3	1	1	6	1	1	3	28																											
205	14	3	6	1	4	1	6	3	28																											
206	14	2	1	5	14	5	1	2	28																											
207	14	2	1	1	2	1	1	2	28																											
208	14	2	2	1	2	2	28																													
209	14	2	5	3	2	3	5	2	28																											
210	14	2	28																																	
211	14	1	1	9	5	1	2	2	1	1	4	3	1	13	1	3	4	1	1	2	2	1	5	9	1	1	28									
212	14	1	1	3	1	1	1	6	1	1	1	3	1	1	28																					
213	14	1	1	2	6	1	8	1	6	2	1	1	28																							
214	14	1	1	1	2	3	1	4	9	1	1	5	3	14	3	5	1	1	9	4	1	3	2	1	1	1	28									
215	14	1	1	1	28																															
216	14	1	2	3	2	1	28																													
217	14	1	2	1	2	1	1	9	4	9	1	1	2	1	2	1	28																			
218	14	1	3	3	1	28																														
219	14	1	3	1	28																															
220	14	1	4	1	28																															
221	14	1	6	2	6	1	28																													
222	14	1	8	1	28																															
223	14	1	13	1	28																															
224	14	1	28																																	
225	15	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##
226	15	30																																		
227	15	15	30																																	
228	15	10	30																																	
229	15	7	1	1	7	30																														
230	15	6	30																																	
231	15	5	30																																	
232	15	4	3	7	3	4	30																													
233	15	3	1	3	1	1	1	1	3	1	3	30																								
234	15	3	2	1	2	1	2	3	30																											
235	15	3	30																																	
236	15	2	1	3	5	1	6	1	5	3	1	2	30																							
237	15	2	1	1	7	10	7	1	1	2	30																									
238	15	2	2	1	14	1	2	2	30																											
239	15	2	5	1	2	4	15	4	2	1	5	2	30																							
240	15	2	30																																	
241	15	1	1	9	1	5	3	3	1	1	3	3	5	1	9	1	1	30																		
242	15	1	1	3	1	14	1	3	1	1	30																									
243	15	1	1	2	3	15	3	2	1	1	30																									
244	15	1	1	1	1	1	2	1	5	1	1	9	1	6	1	9	1	1	5	1	2	1	1	1	1	1	30									
245	15	1	1	1	7	6	7	1	1	1	30																									
246	15	1	2	5	1	14	1	5	2	1	30																									
247	15	1	2	1	1	9	1	9	1	1	2	1	30																							
248	15	1	2	1	30																															
249	15	1	3	1	1	5	1	3	10	3	1	5	1	1	3	1	30																			
250	15	1	4	3	3	4	1	30																												

（6） $n = 251 \sim 300$

n	*q0*	*q1*	*q2*	*q3*	*q4*	*q5*	*q6*	*q7*	*q8*	*q9*	*q10*	*q11*	*q12*	*q13*	*q14*	*q15*	*q16*	*q17*	*q18*	*q19*	*q20*	*q21*	*q22*	*q23*	*q24*	*q25*	*q26*	*q27*	*q28*	*q29*	*q30*	*q31*	*q32*	*q33*	*q34*	*q35*
251	15	1	5	2	1	2	2	15	2	2	1	2	5	1	30																					
252	15	1	6	1	30																															
253	15	1	9	1	1	1	2	1	7	4	2	2	2	4	7	1	2	1	1	1	9	1	30													
254	15	1	14	1	30																															
255	15	1	30																																	
256	16	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##
257	16	32																																		
258	16	16	32																																	
259	16	10	1	2	3	4	3	2	1	10	32																									
260	16	8	32																																	
261	16	6	2	3	7	1	3	1	2	1	3	1	7	3	2	6	32																			
262	16	5	2	1	2	1	10	16	10	1	2	1	2	5	32																					
263	16	4	1	1	1	1	15	1	1	1	1	4	32																							
264	16	4	32																																	
265	16	3	1	1	2	2	1	1	3	32																										
266	16	3	4	3	32																															
267	16	2	1	15	1	2	32																													
268	16	2	1	2	3	3	1	3	1	10	8	10	1	3	1	3	3	2	1	2	32															
269	16	2	2	32																																
270	16	2	3	6	3	2	32																													
271	16	2	6	10	1	4	1	1	2	1	2	1	15	1	2	1	2	1	1	4	1	10	6	2	32											
272	16	2	32																																	
273	16	1	1	10	1	1	32																													
274	16	1	1	4	4	1	1	32																												
275	16	1	1	2	1	1	32																													
276	16	1	1	1	1	2	2	2	1	1	1	1	32																							
277	16	1	1	1	4	10	1	7	2	2	3	3	2	2	7	1	10	4	1	1	1	32														
278	16	1	2	16	2	1	32																													
279	16	1	2	2	1	2	2	1	32																											
280	16	1	2	1	2	1	32																													
281	16	1	3	4	1	1	6	6	1	1	4	3	1	32																						
282	16	1	3	1	4	1	3	1	32																											
283	16	1	4	1	1	1	3	10	1	15	1	10	3	1	1	1	4	1	32																	
284	16	1	5	1	3	2	1	4	8	4	1	2	3	1	5	1	32																			
285	16	1	7	2	7	1	32																													
286	16	1	10	3	3	2	3	3	10	1	32																									
287	16	1	15	1	32																															
288	16	1	32																																	
289	17	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##
290	17	34																																		
291	17	17	34																																	
292	17	11	2	1	3	8	3	1	2	11	34																									
293	17	8	1	1	8	34																														
294	17	6	1	4	1	6	34																													
295	17	5	1	2	3	2	6	2	3	2	1	5	34																							
296	17	4	1	7	1	4	34																													
297	17	4	3	1	1	2	1	1	3	4	34																									
298	17	3	1	4	5	1	1	5	4	1	3	34																								
299	17	3	2	3	34																															
300	17	3	8	3	34																															

（7） $n = 301 \sim 350$

n	q0	q1	q2	q3	q4	q5	q6	q7	q8	q9	q10	q11	q12	q13	q14	q15	q16	q17	q18	q19	q20	q21	q22	q23	q24	q25	q26	q27	q28	q29	q30	q31	q32	q33	q34	q35
301	17	2	1	6	3	1	2	2	1	1	8	11	2	4	2	11	8	1	1	2	2	1	3	6	1	2	34
302	17	2	1	1	1	4	2	1	16	1	2	4	1	1	1	2	34
303	17	2	2	5	2	2	34
304	17	2	3	2	1	1	1	1	1	2	3	2	34
305	17	2	6	2	34
306	17	2	34
307	17	1	1	11	5	1	3	17	3	1	5	11	1	1	34
308	17	1	1	4	1	1	34
309	17	1	1	2	1	2	4	1	1	1	8	6	1	10	1	6	8	1	1	1	4	2	1	2	1	1	34
310	17	1	1	1	1	5	3	1	2	1	3	5	1	1	1	1	34
311	17	1	1	1	2	1	6	3	17	3	6	1	2	1	1	1	34
312	17	1	1	1	34
313	17	1	2	4	11	1	1	3	2	2	3	1	1	11	4	2	1	34
314	17	1	2	1	1	2	1	34
315	17	1	2	1	34
316	17	1	3	2	8	2	3	1	34
317	17	1	4	8	1	2	2	1	8	4	1	34
318	17	1	4	1	34
319	17	1	6	5	1	4	3	1	3	4	1	5	6	1	34
320	17	1	7	1	34
321	17	1	10	1	34
322	17	1	16	1	34
323	17	1	34
324	18	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##
325	18	36
326	18	18	36
327	18	12	36
328	18	9	36
329	18	7	4	2	1	1	4	1	1	2	4	7	36
330	18	6	36
331	18	5	5	1	6	2	3	1	1	2	1	2	1	11	2	1	1	17	1	1	2	11	1	2	1	2	1	1	3	2	6	1	5	5	36
332	18	4	1	1	8	1	1	4	36
333	18	4	36
334	18	3	1	1	1	2	5	1	2	2	11	1	3	7	18	7	3	1	11	2	2	1	5	2	1	1	1	3	36
335	18	3	3	3	36
336	18	3	36
337	18	2	1	3	1	11	2	4	1	3	3	1	4	2	11	1	3	1	2	36
338	18	2	1	1	2	36
339	18	2	2	2	1	17	1	2	2	2	36
340	18	2	3	1	1	1	1	8	1	1	1	1	3	2	36
341	18	2	6	1	8	2	1	2	1	2	8	1	6	2	36
342	18	2	36
343	18	1	1	11	1	5	3	1	17	1	3	5	1	11	1	1	36
344	18	1	1	4	1	3	1	4	1	1	36
345	18	1	1	2	1	6	1	2	1	1	36
346	18	1	1	1	1	36
347	18	1	1	1	2	4	1	17	1	4	2	1	1	1	36
348	18	1	1	1	8	1	1	1	36
349	18	1	2	7	7	2	1	36
350	18	1	2	2	2	1	36

（8） $n=351\sim400$

n	q0	q1	q2	q3	q4	q5	q6	q7	q8	q9	q10	q11	q12	q13	q14	q15	q16	q17	q18	q19	q20	q21	q22	q23	q24	q25	q26	q27	q28	q29	q30	q31	q32	q33	q34	q35
351	18	1	2	1	3	2	2	2	3	1	2	1	36																							
352	18	1	3	5	9	5	3	1	36																											
353	18	1	3	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1	3	1	36																				
354	18	1	4	2	2	18	2	2	4	1	36																									
355	18	1	5	3	3	1	6	1	3	3	5	1	36																							
356	18	1	6	1	1	2	1	8	1	2	1	1	6	1	36																					
357	18	1	8	2	8	1	36																													
358	18	1	11	1	1	1	3	1	1	4	1	5	2	18	2	5	1	4	1	1	3	1	1	1	11	1	36									
359	18	1	17	1	36																															
360	18	1	36																																	
361	19	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##
362	19	38																																		
363	19	19	38																																	
364	19	12	1	2	3	1	8	1	3	2	1	12	38																							
365	19	9	1	1	9	38																														
366	19	7	1	1	1	2	12	2	1	1	1	7	38																							
367	19	6	2	1	3	1	1	2	1	12	19	12	1	2	1	1	3	1	2	6	38															
368	19	5	2	5	38																															
369	19	4	1	3	2	7	4	7	2	3	1	4	38																							
370	19	4	4	38																																
371	19	3	1	4	1	3	38																													
372	19	3	2	12	2	3	38																													
373	19	3	5	5	3	38																														
374	19	2	1	18	1	2	38																													
375	19	2	1	2	1	5	1	2	1	2	38																									
376	19	2	1	1	3	1	2	2	4	2	2	1	3	1	1	2	38																			
377	19	2	2	2	38																															
378	19	2	3	1	4	1	3	2	38																											
379	19	2	7	3	2	2	6	12	1	4	1	1	1	3	4	19	4	3	1	1	1	4	1	12	6	2	2	3	7	2	38					
380	19	2	38																																	
381	19	1	1	12	1	1	38																													
382	19	1	1	5	12	1	5	1	1	2	3	1	18	1	3	2	1	1	5	1	12	5	1	1	38											
383	19	1	1	3	19	3	1	1	38																											
384	19	1	1	2	9	2	1	1	38																											
385	19	1	1	1	1	1	3	1	2	1	3	1	1	1	1	1	38																			
386	19	1	1	1	4	1	18	1	4	1	1	1	38																							
387	19	1	2	19	2	1	38																													
388	19	1	2	3	4	12	1	8	1	12	4	3	2	1	38																					
389	19	1	2	1	1	1	1	2	1	38																										
390	19	1	2	1	38																															
391	19	1	3	2	2	1	1	2	19	2	1	1	2	2	3	1	38																			
392	19	1	3	1	38																															
393	19	1	4	1	2	4	1	1	1	1	12	1	1	1	1	4	2	1	4	1	38															
394	19	1	5	1	1	1	3	1	3	5	2	2	5	3	1	3	1	1	1	5	1	38														
395	19	1	6	1	38																															
396	19	1	8	1	38																															
397	19	1	12	3	4	9	1	2	1	2	1	1	2	1	2	1	9	4	3	12	1	38														
398	19	1	18	1	38																															
399	19	1	38																																	
400	20	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##