# 初等幾何における抽象化と一般化

北海道真狩高等学校　教諭　髙　倉　　亘

（*Keywords*：円、円周角、方べきの定理、抽象化、一般化）

## １　緒　　言

平成１６年８月１３日、久しぶりにＳ氏と再会し、次の問題（予想）を提示された。

**S 氏の予想**

円 O の弦 AB の中点を M とする。点 M を通る任意の２本の割線を CD、C'D'（ただし、DD'∦AB）とし、CC'、DD'が AB の延長上と交わる点を P、Q とすると、MP=MQ である。（*Fig.0*）

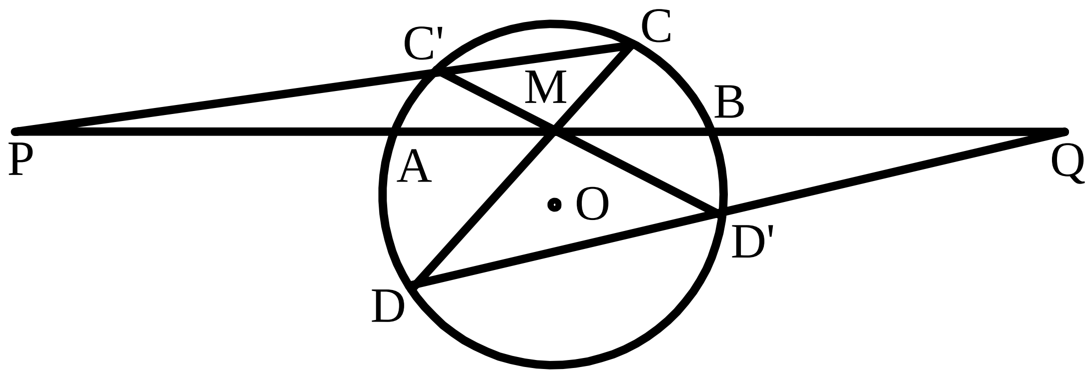


***Fig.0***

本稿は、S 氏の予想を証明するとともに、この問題を抽象化および一般化し、その本質的な部分を考察することを目的とする。

## ２　S氏の予想の証明およびその抽象化と一般化[1−2)]

まず、S 氏の予想が正しいことを証明する。

**S 氏の予想の** ***proof***

Fig. 0 において、点 O から CC'、DD'におろした垂線の足を L、N とすると、点 L、N は、CC'、DD'の中点である。

方べきの定理から、△MCC'∽△MD'D だから、△MLC∽△MND'

∴∠MLC＝∠MND'

よって、∠MLC=∠MNQ・・・①
ここで、∠OMP=∠OLP=∠R だから、４点 P、O、M、L は線分 OP を直径とする同一円周上に存在する。
　∴∠POM=∠MLC・・・②
同様に、４点 O、M、Q、N は線分 OQ を直径とする同一円周上に存在する。
　∴∠MOQ=∠MNQ・・・③
①、②、③より、∠POM＝∠MOQ・・・④
また、OM⊥PQ から、∠OMP=∠OMQ=∠R・・・⑤
△OMP と△OMQ において、④、⑤および辺 OM が共通であることより、
△OMP≡△OMQ、　∴MP=MQ

***q.e.d.***

　CD を C'D'に一致させると、次の定理となる。

**定理１**

　円 O の弦 AB の中点を M とする。点 M を通る任意の弦を CD とし、点 C、D における接線と AB との交点をそれぞれ P、Q とすると、MP=MQ である。（*Fig.1*）

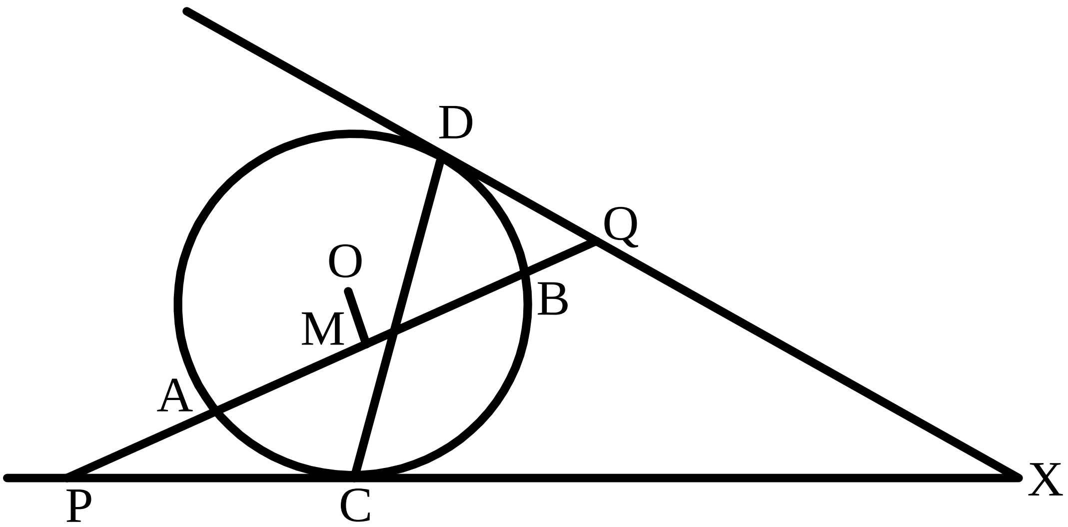


***Fig.1***

**定理１の *proof***

　Fig. １において、直線 PC および QD の交点を点 X とする。
∠OMP=∠OCP=∠R より、４点 O、P、C、M は線分 OP を直径とする同一円周上に存在する。

∴∠POM=∠MCX・・・①
同様に、∠OMQ=∠ODQ=∠R より、４点 O、D、Q、M は線分 OQ を直径とする同一円周上に存在する。
∴∠QOM=∠QDM・・・②
ここで、∠XCD=∠XDC・・・③　だから、
①、②、③より、∠POM＝∠QOM・・・④
また、OM⊥PQ から、∠OMP=∠OMQ=∠R・・・⑤
△OMP と△OMQ において、④、⑤および辺 OM が共通であることより、
△OMP≡△OMQ、　∴MP=MQ

***q.e.d***

定理１は、OM⊥AB に着目して、次のように拡張される。

**定理２**
円 O の中心 O から直線ℓにおろした垂線の足を M とする。点 M を通る任意の割線が円 O と交わる点を C、D とし、点 C、D における接線とℓとの交点をそれぞれ P、Q とすると、MP=MQ である。(*Fig.2*)

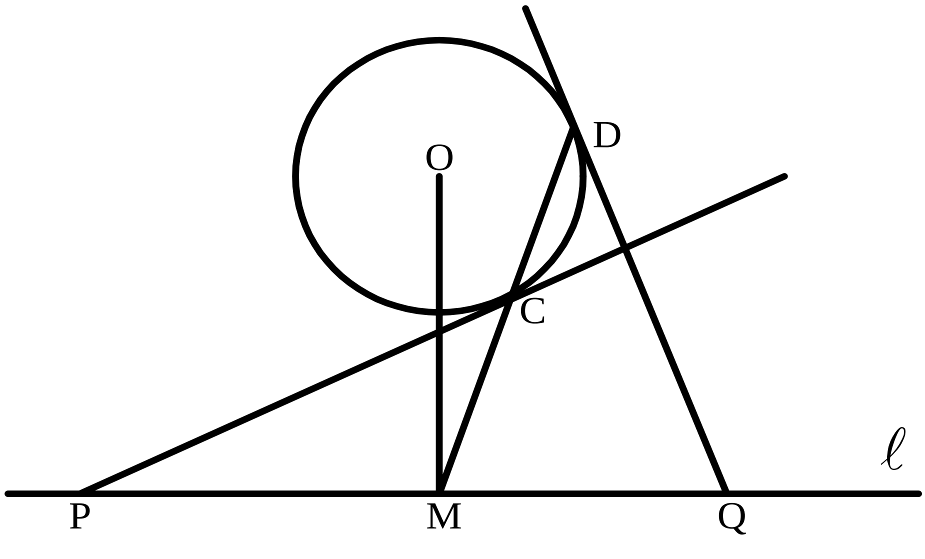


***Fig.2***

**定理２の *proof***
Fig. 2 において、∠OMP=∠OCP=∠R より、４点 O、P、M、C は線分 OP を直径とする同一円周上に存在する。
∴∠POM=∠CMQ・・・①

同様に、∠OMQ=∠ODQ=∠R より、４点 O、M、Q、D は線分 OQ を直径とする同一円周上に存在する。

∴∠QOM=∠QDM・・・②

ここで、∠QMD=∠QDM・・・③　だから、

①、②、③より、∠POM＝∠QOM・・・④

また、OM⊥PQ から、∠OMP=∠OMQ=∠R・・・⑤

△OMP と△OMQ において、④、⑤および辺 OM が共通であることより、

△OMP≡△OMQ、　∴MP=MQ

***q.e.d.***

ℓが円 O と交わる場合が定理１である。点 C、D における接線をともに割線に拡張すると、次の定理となる。

**定理３**

円 O の中心 O から直線ℓにおろした垂線の足を M とする。点 M を通る２つの割線が円 O と交わる点を C、D；C'、D'とする。CC'、DD'がℓと交わる点を P、Q とすると、MP=MQ である。（*Fig.3*）

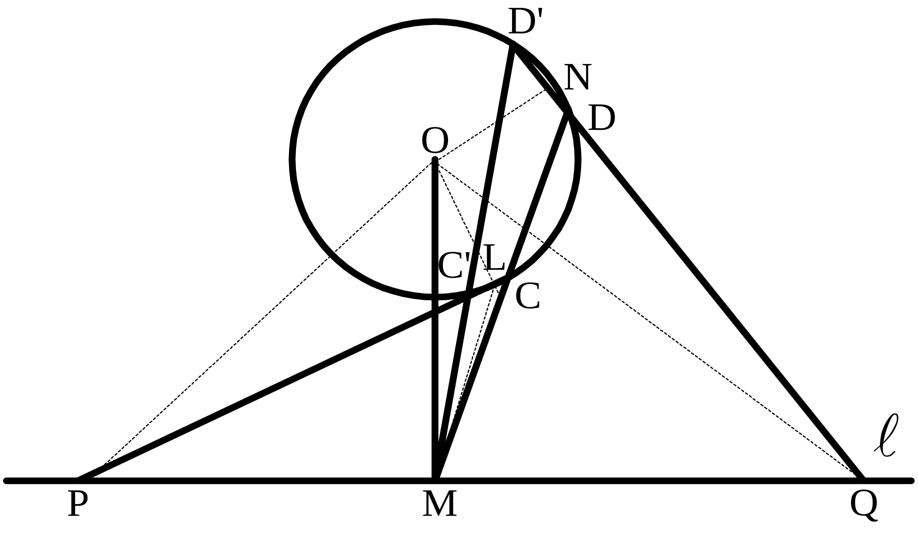


***Fig.3***

**定理３の *proof***

Fig. 3 において、点 O から CC'、DD'におろした垂線の足を L、N とすると、点 L、N は、CC'、DD'の中点である。

方べきの定理から、△MCC'∽△MD'D だから、△MLC'∽△MND

　∴∠MLC'＝∠MND
よって、∠MLP=∠MNQ・・・①
ここで、∠OLP=∠OMP=∠R だから、４点 O、P、M、L は線分 OP を直径とする同一円周上に存在する。
　∴∠POM=∠PLM・・・②
同様に、４点 O、M、Q、N は線分 OQ を直径とする同一円周上に存在する。
　∴∠MNQ=∠MOQ・・・③
①、②、③より、∠POM＝∠MOQ・・・④
また、OM⊥PQ から、∠OMP=∠OMQ=∠R・・・⑤
△OMP と△OMQ において、④、⑤および辺 OM が共通であることより、
△OMP≡△OMQ、　∴MP=MQ

***q.e.d.***

　ℓが円 O と交わる場合が、S 氏の予想である。

## ３　結　　言

　本稿では、円を題材として初等幾何における抽象化と一般化について論じた。一般に円に関して、弦の中点は中心から直線におろした垂線の足に、また、弧の中点はその弧の上で弧の両端から等距離にある二点に拡張される。また、接線は割線に、円周上の一点における接線は円周外の一点からの二本の接線に拡張される。また、接する二円と接点は交わる二円とその二交点に拡張される。接する二円が一般の位置の二円に拡張されるときは、接点は二円の相似の中心に拡張される。[1）]

　このような抽象化と一般化は、数学を考えるうえにおいて非常に重要である。特に、意欲的に数学を学ぼうとする高校生が、このような題材を考察することは大いに歓迎すべきことである。


## 謝　　辞

　本稿を書くにあたって、札幌市在住 数学愛好家 新城浩一 氏から問題の提示、議論をいただきました。この場を借りてお礼申し上げます。


## 参 考 文 献


１）清宮俊雄「モノグラフ　幾何学 ―発見的研究法― 」科学新興社.
２）佐々木重夫「幾何入門」岩波書店.