幾何学的確率に関する教材について

北海道千歳北陽高等学校　教諭　高　倉　　亘

（*Keywords*：幾何学的確率、測度、モンテカルロ法、*Buffon* の針、*De Moivre-Laplace* の定理 ）

１　緒　　言

図形に関する確率の問題は幾何学的確率と呼ばれ様々な問題がある。幾何学的確率については、一般に次のように定式化することができる。例えば、平面上にある可測な領域Gがあり、その中に他の領域gが含まれているとする。領域Gの中へ１つの点が無作為に投げ込まれるとき、その点が領域gの中へ落ちる確率はいくらか、という問題が考えられる。ここで、「１つの点が領域Gの中へ無作為に投げ込まれる」という意味は、投げ込まれる点は領域G内の任意の点へ落ちることができ、それがG内のある部分の中へ落ちる確率はその部分の測度のみに比例し、その部分の位置や形状には依存しないということである。したがって、この定義によれば、領域Gの中へ無作為に投げ込まれた１つの点が領域gの中へ落ちる確率 p は、

$$p = \frac{mesg}{mesG}$$

で与えられる。ここで、$mesA$はAの測度である。[1)−2)]

本稿では、中高生に紹介するものとしてふさわしいと思われる例題をいくつかとりあげる。次章に示す例題１，２は、平成８年度および９年度、前々任校における中学生対象の体験入学における模擬授業で提示したものであり、例題３の一部は今年度（平成１７年度）、本校の学校説明会において中学生に向けて提示したものである。また、これらの例題は、前々任校においては授業の中でも教材としてとりあげていたものである。ただし、例題文の表現は本稿の記載にあたり修正を加えている。

２　幾何学的確率に関する例題

例題１　（出会いの問題）

Ａさんと Ｂさんがある場所で０時（正午）から１時までの間に出会う約束をした。Ａ、Ｂのどちらも先着したときは、２０分だけ待っても相手が来なければその場を立ち去ってしまう。２人はどちらも約束した１時間の間に無作為に到着し、２人の到着時刻は独立であるとすれば、Ａ、Ｂが出会う確率はどのようになるか。

＜解答例＞

A の到着時刻を x （０時 x 分）、B のそれを y とする。２人が出会うための必要十分条件は、

$$|x-y| \le 20、\ 0 \le x \le 60、\ 0 \le y \le 60$$

である。この条件をみたす点(x, y)の範囲を *Fig*.1 に示した。

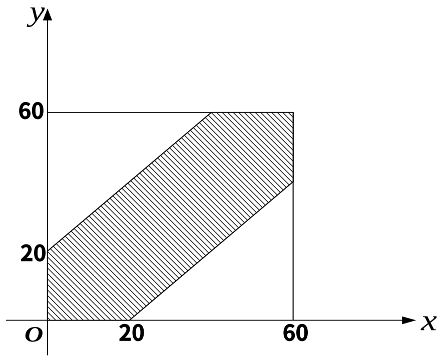

Fig.1　例題１の事象の分布

条件をみたす領域の面積は60^2-40^2、正方形全体（全事象に対応する領域）の面積は60^2である。したがって、求める確率 p は、

$$p=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}$$

である。

例題２　（線分の分割による三角形の作成問題）
　長さ１の線分上に２点を無作為にとり、線分を３つの線分に分ける。この３つの線分で三角形が作成できる確率はどのようになるか。

＜解答例＞

$x, y \in [0,1]$を分点とすれば、３つの線分の長さは、

$$\min(x, y) \quad ・・・①$$
$$\max(x, y)-\min(x, y) \quad ・・・②$$
$$1-\max(x, y) \quad ・・・③$$

となる。これらの３つの線分が三角形をなすためには、長さがすべて$\frac{1}{2}$より小さければよいので、

$$\begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)<0 & (\because ①、③が\frac{1}{2}より小さいことより。) \\ |x-y|<\frac{1}{2} & (\because ②が\frac{1}{2}より小さいことより。) \end{cases}$$

が成立すればよい。そのような、$(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$の点の範囲を *Fig*.2 に示した。

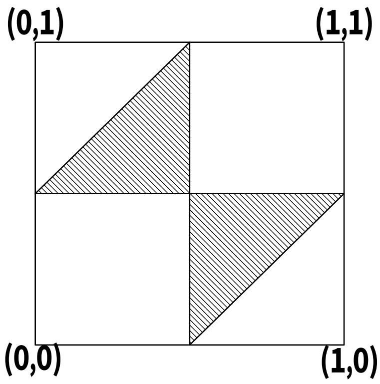

Fig.2　例題２の事象の分布

この図形の面積は$\dfrac{1}{4}$である。したがって、求める確率 p は、

$$p=\frac{1}{4}$$

である。

例題１および例題２において正方形を考えた理由は、２つの変数x, yを区間の中で一様分布に従う２つの独立な確率変数と考えたからである。一般に区間$[0,1]$で一様分布に従う独立な確率変数がn個与えられているとき、確率の計算はn次元単位立方体の中でn次元 *Lebesgue* 測度λ^nを用いて計算することになる。[1)−2)]

例題３　（コイン投げの問題とモンテカルロ法）

一辺が３㎝の正方形のタイルを敷きつめた広い床に、直径が２㎝の１円硬貨を落とした。１円硬貨がタイルの目の中に完全に入る確率 p_1、２つのタイルにかかる確率 p_2、３つのタイルにかかる確率 p_3、４つのタイルにかかる確率 p_4 は、それぞれどのようになるか。

＜解答例＞

１円硬貨の中心は１枚のタイルに着目すると、必ずタイルの周あるいは内部のいずれかに存在する。*Fig*.3 は１つのタイルを示したものであり、p_1 を求めるには、１円硬貨に中心が *Fig*.3 の斜線部分に存在すればよい。

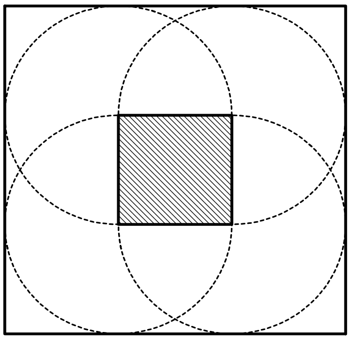

Fig.3　１円硬貨がタイルの目の中に入る場合の１円硬貨の中心の存在範囲

p_1 は１枚のタイルの面積と斜線部分の面積との比を考えればよいので、

$$p_1 = \frac{(3-1\times 2)^2}{3^2} = \frac{1}{9}$$

となる。同様に、p_2、p_3、p_4 を求めるには１枚のタイル上で１円硬貨の中心がどこに存在すればよいかを考えればよい。*Fig*.4 は１枚のタイル上で１円硬貨の中心がどこに存在すればどのような事象が現れるかを示したものである。

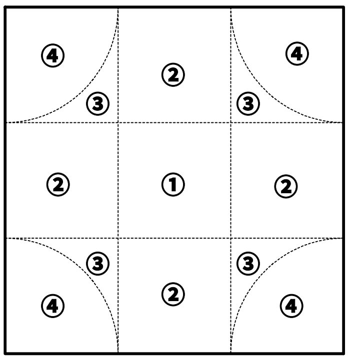

Fig.4　例題３における事象の分布

図中の①、②、③、④の領域に１円硬貨の中心が存在すれば、それぞれ１円硬貨にかかるタイルの個数は○内の数字になる。*Fig*.4 において、②、③、④の領域の面積はそれぞれ、４、$4-\pi$、$\pi\ cm^2$ となるので、確率分布表は次のようになる。

n	1	2	3	4
p_n	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4-\pi}{9}$	$\frac{\pi}{9}$

次に示す類題では、敷きつめるタイルの大きさを１円硬貨の外接正方形としている。このように問題を変えることにより、確率が０であることの意味を考える良い例題になる。

例題３の類題　（確率が０の解釈）

一辺が２㎝の正方形のタイルを敷きつめた広い床に、直径が２㎝の１円硬貨を落とした。１円硬貨がタイルの目の中に完全に入る確率 p_1、２つのタイルにかかる確率 p_2、３つのタイルにかかる確率 p_3、４つのタイルにかかる確率 p_4 は、それぞれどのようになるか。

＜解答例＞

例題３と同様に、 p_1、 p_2、 p_3、 p_4 を求めるには１枚のタイル上で１円硬貨の中心がどこに存在すればよいかを考えればよい。*Fig*.5 は１枚のタイル上で１円硬貨の中心がどこに存在すればどのような事象が現れるかを示したものである。

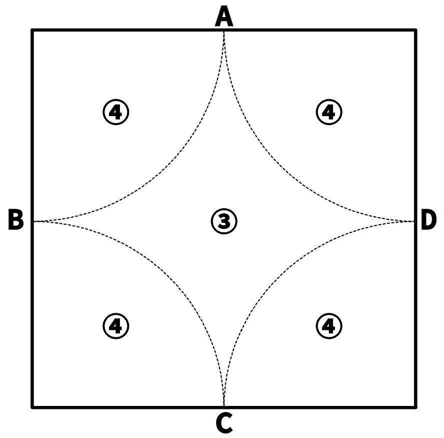

Fig.5　例題３の類題における事象の分布

図中の③、④の領域に１円硬貨の中心が存在すれば、それぞれ１円硬貨にかかるタイルの個数は〇内の数字になる。*Fig*.5 において、正方形の面積は4 cm^2 、③、④の領域の面積はそれぞれ、 $4-\pi$ 、π cm^2 となるので、確率分布表は次のようになる。

n	1	2	3	4
p_n	0	0	$\frac{4-\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$

ここで、 $p_1 = p_2 = 0$ であるが、AC と BD の交点に１円硬貨の中心が存在する場合には、１円硬貨がタイルの目に完全に入り、AC と BD の交点以外の AC、BD 上に１円硬貨の中心が存在すれば、１円硬貨は２つのタイルにかかることがわかる。

このようなコイン投げの試行から、 p_3 あるいは p_4 を統計的に求めることによって、π の近似値を求めることができることがわかる。このようにして求められたπ

の値は、モンテカルロ法[3)] によって π を求めることと本質的に同じである。

次に、有名な *Buffon* の針の問題について考察する。

例題４　（***Buffon*** **の針の問題と円周率**）

平面上に $2a$ の間隔をおいて無数の平行線が引かれている。この平面上への長さ $2\ell(\ell < a)$ の針が無作為に投げられる。このとき、針がどれかの直線と交わる確率はどのようになるか。

＜解答例＞

Fig.6 に示すように、針の中心から最も近い平行線までの距離を x 、針とこの平行線とのなす角を θ とする。

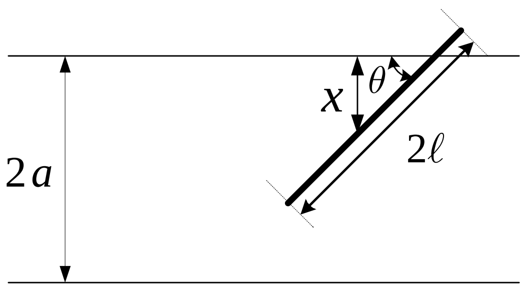

Fig.6　平行線と針との位置関係

x と θ の値によって、針の位置は完全に定まる。したがって、針のとり得るすべての位置は、*Fig*.7 において、縦・横が a 、π の長方形の中の点によって表現できる。

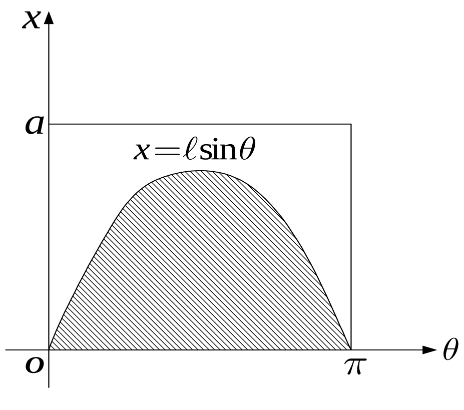

Fig.7　例題４の事象の分布

Fig.6 からわかるように、針が平行線と交わるためには、

$$x < \ell \sin\theta$$

であることが必要十分条件となる。針は無作為に投げられるので、求める確率 p は

Fig.7 の斜線で示した領域の面積と長方形の面積との比に等しい。すなわち、

$$p=\frac{1}{a\pi}\int_0^{\pi}\ell\sin\theta d\theta=\frac{2\ell}{a\pi}$$

である。

上記の確率を与える式は、例題３とその類題のように、π の近似値を実験的に求めるために利用できる。すなわち、上記で得られた p の式より、

$$\pi=\frac{2\ell}{ap}$$

が得られ、針投げの回数 n が大きいとき、この試行で針が平行線と交わった回数を m とすれば、近似的に、

$$\pi\approx\frac{2\ell n}{am}$$

となる。

次に、このような試行から π の近似値をよい精度で得るためには、膨大な試行を行う必要があることを示す。例えば、$n\le 5000$、$a\ge\ell$ とし、π の実験値を π' とすれば、

$$\frac{1}{\pi'}-\frac{1}{\pi}=\frac{a(m+1)}{2\ell n}-\frac{am}{2\ell n}=\frac{a}{2\ell n}\ge\frac{1}{2n}\ge 0.0001$$

したがって、

$$|\pi'-\pi|\ge 0.0001\times\pi\pi'\approx 0.001$$

となり、m の値が1だけ変化すれば、π' の小数第３位は変化する。このことから、$\pi\approx 3.141$ という値を与える m の値は、ただ１つしか存在しない。このような m の値が得られる確率 $p_n(m)$ は、*De Moivre-Laplace* の定理[4)]

$$p_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}e^{-\frac{(m-np)^2}{2np(1-p)}}$$

によって、近似的に計算することができる。ここで、$a=2\ell$ として概算すると、任意の m に対して、

$$p_n(m)\le\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}=\frac{1}{\sqrt{2n(1-p)}}<0.03$$

となる。すなわち、5000回の試行で、$\pi\approx 3.141$ を得る確率が約３%程度ということになるので、膨大な試行を行わなければ、高精度の π の近似値は得られないことがわかる。

３　結　　言

　本稿の内容は確率を測度論から捉えるための導入教材としてふさわしいものと思われる。数学を愛好する中高校生には指導要領に捉われない、興味を引き起こす良質な題材の提供が必要である。本稿をもとに、新たな問題提起がなされることを期待したい。

参 考 文 献

１）A.　H.　コルモゴロフ「確率論の基礎概念」（根本伸司　訳）東京図書.

２）伊藤清三「ルベーグ積分入門」裳華房.

３）宮武修、中山隆「モンテカルロ法」日刊工業新聞社.

４）B.V.Gnegenko「*The theory of probability*」Chelsea,New York.