正の判別式を有する簡約２次形式に関する考察

北海道千歳北陽高等学校　教諭　髙　倉　　亘

（ *Keywords*：２次形式、２次無理数、判別式、連分数、類数 ）

１　緒　　言

本稿では、正の判別式Dに対する類数が有限であることを示す。したがって、本稿における２次形式の判別式は正かつ非平方数であるものとする。まず、簡約２次形式、簡約２次無理数を定義し、判別式Dの簡約２次形式が有限個であること、任意の２次形式がある簡約２次形式に対等であることを示す。次に、２次無理数、簡約２次無理数がそれぞれ循環連分数、純循環連分数で表されること、任意の２次無理数がある簡約２次無理数に正に対等であることを示す。これより、正の判別式を有する２次形式の類数が有限であることが導かれる。また、最小周期がmの簡約２次無理数ξの中間連分数を、$\xi=\left[k_0,k_1,...,k_{n-1},\xi_n\right](n=1,2,...,m-1)$としたとき、$\xi$と対等な簡約２次無理数が、$\xi_0=\xi,\xi_1,\xi_2,...,\xi_{m-1}$のみであることを証明する。これは、狭義の類数を計算する方法の根拠となる。最後にいくつかの正の判別式の値に対して簡約２次形式と類数を求める計算例を示す。

２　簡約２次形式と簡約２次無理数[1)－9)]

２次形式$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$が簡約２次形式であるとは、条件

$a>0$、$b<0$、$c<0$、$a+b+c<0$、$a-b+c>0$　・・・①

を満たすときにいう。$f(x,y)$に対応する２次式を$g(x)=ax^2+bx+c$とおけば、

$g(1)=a+b+c$、$g(0)=c$、$g(-1)=a-b+c$

である。したがって、①が成立しているときは、

$a>0$、$g(0)<0$、$g(1)<0$、$g(-1)>0$　・・・②

が成立する。逆に、②が成立していると仮定すれば、

$a>0$、$c=g(0)<0$、$a+b+c=g(1)<0$、$a-b+c=g(-1)>0$

が成立する。また、$2b=g(1)-g(-1)<0$より、$b<0$も得られるから、①が成立する。よって、①と②は同値である。

２次式$g(x)=ax^2+bx+c$の第１根をξ、第２根をξ'とおくと、

$$\xi=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}、\xi'=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

である。②が成立するときは、

$\xi>1$、$0>\xi'>-1$　すなわち、$\xi>1>-\xi'>0$　・・・③

が成立する。逆に、③が成立していると仮定すれば、$\dfrac{\sqrt{D}}{a}=\xi-\xi'>0$ より、$a>0$ が得られるので、

$g(-1)>0$、$g(0)<0$、$g(1)<0$

が成立する。以上から次の補題を得る。

補題１

２次形式 $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ が簡約２次形式であるための必要十分条件は、$\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}>1>\dfrac{b+\sqrt{D}}{2a}>0$ が成立することである。

判別式が正の整係数既約２次式 $g(x)=ax^2+bx+c$ の第１根 ξ、第２根 ξ' が、$\xi>1>-\xi'>0$ を満たすとき、ξ を既約２次無理数と呼ぶことにする。補題１より、次の定理が成立する。

定理１

２次形式 $f(x,y)$ に対応する２次式の第１根を ξ とする。このとき、$f(x,y)$ が簡約２次形式となるための必要十分条件は、ξ が簡約２次無理数となることである。

定理２

与えられた判別式 D を有する簡約２次形式の個数は有限である。

proof

$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ が判別式 D を有する簡約２次形式であるとき、補題１より $b+\sqrt{D}>0$ が成立する。これより、$\sqrt{D}>-b=|b|$ を得る。したがって、b のとり得る値は有限個であり、それぞれの値に対して、$4ac=b^2-D$ で定まる a、c も有限個である。ゆえに、与えられた判別式 D を有する簡約２次形式は有限個である。

q.e.d.

３　２次無理数の連分数展開と類数の有限性

（１）　２次無理数の対等と連分数展開

modular 変換は２次代数的数のなす集合の上の変換を引き起こす。特殊１次変換の成分は整数であるから、*modular* 変換は実数を実数に移す。実数である２次代数的数が２次無理数であるから、*modular* 変換は２次無理数のなす集合上の変換を引き起こす。同様にして、*modular* 変換が無理数のなす集合上の変換を引き

起こす。ここで、ωを2次無理数とすると、

$$\omega=[k_0,k_1,...,k_{n-1},\omega_n]=\frac{p_n\omega_n+p_{n-1}}{q_n\omega_n+q_{n-1}}、\quad p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n$$

と表される。上に述べたことから、ω_nも2次無理数である。また、次の補題が成立することも、上式から明らかである。

補題2

ωを2次無理数とし、連分数展開において、$\omega=[k_0,k_1,...,k_{n-1},\omega_n]$と表されたとする。$n$が偶数ならば$\omega$と$\omega_n$は正に対等であり、$n$が奇数ならば$\omega$と$\omega_n$は負に対等である。

定理3

無理数ξとηに対して、

$$\eta=T(\xi)=\frac{r\xi+s}{t\xi+u}、\quad T=\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}\in SL(\mathbb{Z})^{\pm}、\quad t>u>0、\quad \xi>1$$

となるTが存在するものと仮定する。このとき、あるnが存在して、

$$\eta=[k_0,k_1,...,k_{n-1},\xi]、\quad r=p_n、\quad s=p_{n-1}、\quad t=q_n、\quad u=q_{n-1}$$

が成立する。更に、$|T|=1$ならばnは偶数、$|T|=-1$ならばnは奇数である。

proof

有理数$\dfrac{r}{t}$の連分数展開を、$\dfrac{r}{t}=[k_0,k_1,...,k_{n-1}]$とする。

仮定より、$t>u>0$であるから、$t>1$である。また、$ru-st=\pm1$より、$(r,t)=1$となる。したがって、$r\neq0$である。これより、$n\geq2$となる。ここで、

$$T_j=\begin{pmatrix} k_j & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}、\quad \prod_{m=0}^{j-1}T_m=\begin{pmatrix} p_j & p_{j-1} \\ q_j & q_{j-1} \end{pmatrix}$$

とおけば、

$$\frac{r}{t}=[k_0,k_1,...,k_{n-1}]=\frac{p_{n-1}k_{n-1}+p_{n-2}}{q_{n-1}k_{n-1}+q_{n-2}}=\frac{p_n}{q_n}$$

となる。ここで、$(p_n,q_n)=1$、$q_n>0$であるので、$\dfrac{r}{t}=\dfrac{p_n}{q_n}$より、$r=p_n$、$t=q_n$を得る。一方、$n$を偶数にも奇数にもすることができるので、$|T|$の値に応じて$n$を

定め直し、

$$ru - st = p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n \quad ・・・④$$

となるようにできる。このとき、

$$ru - st = p_n u - q_n s = p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n$$

が成立する。したがって、

$$p_n(u - q_{n-1}) = q_n(s - p_{n-1})$$

を得る。このとき、$q_n \mid u - q_{n-1}$ となるが、$q_n = t > u > 0$ であり、また、$n \geq 2$ であることから、$q_n \geq q_{n-1} > 0$ となるので、$|u - q_{n-1}| < q_n$ が成立する。したがって、$u = q_{n-1}$、$s = p_{n-1}$ を得る。以上から、

$$[k_0, k_1, \dots, k_{n-1}, \xi] = \frac{p_n \xi + p_{n-1}}{q_n \xi + q_{n-1}} = \frac{r\xi + s}{t\xi + u} = \eta$$

が成立する。すなわち、$[k_0, k_1, \dots, k_{n-1}, \xi]$ は η の中間連分数である。また、q_j は j について単調増加であるから、$t = q_n$ となる n は一意に定まる。$|T| = 1$ ならば n が偶数、$|T| = -1$ ならば n が奇数になることは、④より明らかである。

q.e.d.

$\eta = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$、$\xi = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ とおくと、$\eta = [1, \xi] = [1, 3, 1, 1, \xi]$ となる。したがって、η と ξ は正にも負にも対等であり、定理３における n の偶奇は η と ξ だけからは定まらない。

定理４

無理数 ξ、η が対等であるとする。このとき、ξ、η の中間連分数

$$\xi = [k_0, k_1, \dots, k_{\ell-1}, \xi_\ell]、\ \eta = [h_0, h_1, \dots, h_{m-1}, \eta_m]$$

で、$\xi_\ell = \eta_m$ となるものが存在する。ここで、ξ と η が正に対等であれば、ℓ、m ともに偶数、あるいは、ともに奇数となるようにできる。また、ξ と η が負に対等であれば、ℓ、m の一方は偶数、他方は奇数となるようにできる。

proof

ξ と η が対等であることから、

$$\eta = T(\xi) = \frac{r\xi + s}{t\xi + u}、T = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \in SL(\mathbb{Z})^{\pm}$$

を満たすTが存在する。ここで、Tを$-T$で置き換えて、$t\xi + u > 0$とできる。

$\left|-T\right| = \left|T\right|$より、$T$の正負は不変である。$\xi$の中間連分数を、

$$\xi = \left[k_0, k_1, ..., k_{n-1}, \xi_n\right] = \frac{p_n\xi_n + p_{n-1}}{q_n\xi_n + q_{n-1}}$$

とする。このとき、

$$\eta = T(\xi) = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}\left(\xi_n\right)$$

となる。ここで、

$$\begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\eta = \frac{A_n\xi_n + B_n}{C_n\xi_n + D_n} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}\left(\xi_n\right)、\begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} \in SL(\mathbb{Z})^{\pm}$$

となる。ここで、

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

が成立するから、

$$\left|\xi q_n - p_n\right| < \frac{\dfrac{q_n}{q_{n+1}}}{q_n}、\frac{q_n}{q_{n+1}} < 1$$

となる。したがって、$p_n = \xi q_n + \dfrac{\delta_n}{q_n}$、$\left|\delta_n\right| < 1$と表すことができる。このとき、

$$C_n = tp_n + uq_n = t\left(\xi q_n + \frac{\delta_n}{q_n}\right) + uq_n = \left(t\xi + u\right)q_n + \frac{t\delta_n}{q_n}、$$

$$D_n = tp_{n-1} + uq_{n-1} = \left(t\xi + u\right)q_{n-1} + \frac{t\delta_{n-1}}{q_{n-1}}$$

となる。一方、$t\xi + u > 0$、$\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$であるから、十分大きい$\ell$をとると、

$$q_\ell > q_{\ell-1} > 0 \text{ かつ、} \left| \frac{t\delta_{\ell-1}}{q_{\ell-1}} - \frac{t\delta_\ell}{q_\ell} \right| < t\xi + u$$

とすることができる。このとき、$C_\ell > D_\ell > 0$ となるので、

$$\eta = \frac{A_\ell \xi_\ell + B_\ell}{C_\ell \xi_\ell + D_\ell} \text{、} (C_\ell > D_\ell > 0\text{、} \xi_\ell > 1)$$

が成立する。したがって、定理３より、ある m に対して、

$$\eta = [h_0, h_1, \ldots, h_{m-1}, \xi_\ell]$$

が成立する。

ξ と η が正に対等の場合は ℓ を偶数にとると ξ と ξ_ℓ は正に対等となる。したがって、η と ξ_ℓ は正に対等となるから、定理３より m は偶数にできる。また、ℓ を奇数にとると、ξ と ξ_ℓ は負に対等となるから η と ξ_ℓ も負に対等となるので、m を奇数にできる。

ξ と η が負に対等の場合は ℓ を偶数にとると ξ と ξ_ℓ は正に対等、η と ξ_ℓ は負に対等となる。したがって、定理３より m は偶数にできる。また、ℓ を奇数にとると、ξ と ξ_ℓ は負に対等、η と ξ_ℓ は正に対等となるから m は奇数にできる。

q.e.d.

（２）循環連分数

無限連分数

$$\omega = [k_0, k_1, \ldots, k_n, \ldots]$$

に対して、ある自然数 m、ℓ が存在して、$n > \ell$ のとき $k_{n+m} = k_n$ が成立するとき、この無限連分数を周期 m の循環連分数という。このことは、無理数 ω の中間連分数

$$\omega = [k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}, \omega_n]$$

が、$n > \ell$ のとき、$\omega_{n+m} = \omega_n$ を満たすことと同値である。特に、上の関係を満たす m の中で、最小のものを最小周期という。周期が最小周期の倍数になることは明らかである。

例えば、

$$\omega = [k_0, k_1, \ldots, k_\ell, h_1, h_2, \ldots, h_m, h_1, h_2, \ldots, h_m, h_1, h_2, \ldots]$$

は周期 m の循環連分数である。以下これを、

$$\omega=\left[k_0,k_1,\ldots,k_\ell,\overline{h_1,h_2,\ldots,h_m}\right]$$

と表すことにする。特に、

$$\omega=\left[\overline{k_0,k_1,\ldots,k_\ell}\right]$$

となるとき、この循環連分数を純循環連分数という。

定理５

無理数ωが循環連分数として表現されるならば、ωは２次無理数である。

proof

ωが循環連分数として表されることから、あるm、ℓが存在して、

$$\omega=\left[k_0,k_1,\ldots,k_\ell,\overline{h_1,\ldots,h_m}\right]$$

と表すことができる。ここで、

$$\eta=\left[\overline{h_1,h_2,\ldots,h_m}\right]$$

とおくと、補題２より、ωとηは対等である。一方、$\eta=\left[h_1,\ldots,h_m,\eta\right]$であるから、

$$\eta=\frac{r\eta+s}{t\eta+u}\text{、}\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}\in SL(\mathbb{Z})^{\pm}\text{、}t>0$$

と表すことができる。このとき、

$$t\eta^2+(u-r)\eta-s=0\text{、}t>0$$

が成立するので、ηは２次無理数である。したがって、ηと対等なωも２次無理数である。

q.e.d.

定理６

２次無理数ωは循環連分数として表現される。

proof

ωを２次無理数とすると、

$$a\omega^2+b\omega+c=\begin{pmatrix}\omega & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega \\ 1\end{pmatrix}=0$$

を満たす整数$a\neq 0$、b、cが存在する。一方、ωの中間連分数は、

$$\omega = [k_0, k_1, ..., k_{n-1}, \omega_n] = \frac{p_n\omega_n + p_{n-1}}{q_n\omega_n + q_{n-1}}$$

と表すことができる。これを $a\omega^2 + b\omega + c = 0$ に代入し、$(q_n\omega_n + q_{n-1})^2$ 倍して、

$$0 = \begin{pmatrix} p_n\omega_n + p_{n-1} & q_n\omega_n + q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n\omega_n + p_{n-1} \\ q_n\omega_n + q_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \omega_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \omega_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n & \frac{B_n}{2} \\ \frac{B_n}{2} & C_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおく。このとき、成分を比較すると次式が成立する。

$$A_n = a{p_n}^2 + bp_nq_n + c{q_n}^2$$

$$B_n = 2ap_np_{n-1} + b(p_nq_{n-1} + p_{n-1}q_n) + 2cq_nq_{n-1}$$

$$C_n = a{p_{n-1}}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + c{q_{n-1}}^2$$

$$ {B_n}^2 - 4A_nC_n = b^2 - 4ac$$

一方、$\left|\omega - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{{q_n}^2}$ が成立するから、$p_n = \omega q_n + \frac{\delta_n}{q_n} \quad (|\delta_n| < 1)$ と表すことができる。これより、

$$A_n = a\left(\omega q_n + \frac{\delta_n}{q_n}\right)^2 + bq_n\left(\omega q_n + \frac{\delta_n}{q_n}\right) + c{q_n}^2$$

$$= \left(a\omega^2 + b\omega + c\right){q_n}^2 + (2a\omega + b)\delta_n + a\left(\frac{{\delta_n}^2}{{q_n}^2}\right)$$

となるが、$a\omega^2 + b\omega + c = 0$ であるから、

$$A_n=(2a\omega+b)\delta_n+a\left(\frac{\delta_n{}^2}{q_n{}^2}\right)$$ より、$|A_n|<2|a\omega|+|b|+|a|$

を得る。同様に、

$$|C_n|<2|a\omega|+|a|+|b|$$

が得られ、これより、

$$B_n{}^2=4A_nC_n+(b^2-4ac)\le 4(2|a\omega|+|a|+|b|)^2+|b^2-4ac|$$

も導かれる。以上から、整数 A_n、B_n、C_n は n によらず有界である。したがって、

$$(A_p,B_p,C_p)=(A_q,B_q,C_q)=(A_r,B_r,C_r)$$

となる相異なる番号 p、q、r が存在する。このとき、ω_p、ω_q、ω_r はすべて２次方程式

$$A_px^2+B_px+C_p=0$$

の根であるから、そのうちの２つは一致する。それを、$\omega_p=\omega_q$、$p<q$ であるとする。このとき、ω の中間連分数は、

$$\omega=\left[k_0,k_1,...,k_{p-1},\omega_p\right]=\left[k_0,k_1,...,k_{p-1},...,k_{q-1},\omega_p\right]$$

となる。よって、２次無理数 ω は循環連分数展開をもつ。

q.e.d.

定理７
　純循環連分数として表現される無理数 ω は簡約２次無理数である。

proof

　ω は循環連分数として表されるので、定理７より２次無理数である。したがって、簡約性を示せばよい。ω は純循環連分数として表されるので、ある n に対して、

$$\omega=\left[k_0,k_1,...,k_{n-1},\omega\right]$$

となる。このとき、$\omega=\dfrac{p_n\omega+p_{n-1}}{q_n\omega+q_{n-1}}$ となるので、

$$q_n\omega^2+(q_{n-1}-p_n)\omega-p_{n-1}=0$$

が成立する。これより、

$$g(x)=q_n x^2+(q_{n-1}-p_n)x-p_{n-1}=0$$

が成立する。

一方、$p_1=k_0\geq q_1=1$ と $p_{n+1}=p_n k_n+p_{n-1}$、$q_{n+1}=q_n k_n+q_{n-1}$ より、$n\geq 1$ のとき、$p_n>q_n>0$ が成立する。したがって、

$$g(1)=q_n+q_{n-1}-p_n-p_{n-1}=q_n\left(1-\frac{p_n}{q_n}\right)+q_{n-1}\left(1-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)<0$$

が成立する。以上のことから、ω は簡約２次無理数である。

q.e.d.

補題３

簡約２次無理数 ω の中間連分数を、$\omega=\left[k_0,k_1,\ldots,k_{n-1},\omega_n\right]$ $(n=1,2,\ldots)$ とする。このとき、ω_1、ω_2、・・・、は、すべて簡約２次無理数である。

proof

仮定より、ω を根としてもつ簡約２次式 $g(x)$ が存在する。このとき、次のことが成立する。

$$g(x)=ax^2+bx+c、\ g(\omega)=0、\ a>0、\ g(-1)>0、\ g(0)<0、\ g(1)<0$$

ここで、$\omega=k_0+\dfrac{1}{\omega_1}$ を $g(\omega)=0$ に代入して、${\omega_1}^2$ 倍すれば、

$$(a{k_0}^2+bk_0+c){\omega_1}^2+(2ak_0+b)\omega_1+a=0$$

となる。また、

$$A=-(a{k_0}^2+bk_0+c)、\ B=-(2ak_0+b)、\ C=-a、\ h(x)=Ax^2+Bx+C$$

とおけば、$h(\omega_1)=0$ が成立する。

一方、$1\leq k_0=\left[\omega\right]$ より、$0\leq k_0-1<k_0<\omega<k_0+1$ であるから、

$$g(k_0-1)<0、\ g(k_0)<0、\ g(k_0+1)>0$$

が成立する。これより、$A=-g(k_0)>0$ であり、

$$h(1)--g(k_0+1)<0、\ h(-1)=-g(k_0-1)>0、\ h(0)=-a<0$$

となるので、h は簡約２次式である。ゆえに、ω_1 は簡約２次無理数である。$\omega_2,\omega_3,\ldots$ についても同様である。

q.e.d.

定理８

簡約２次無理数ωは純循環連分数として表現される。

proof

ωは簡約２次無理数であるから、$\omega > 1$を満たす。したがって、$k_0 \geq 1$が成立する。ωの中間連分数を、$\omega = [k_0, k_1, ..., k_{n-1}, \omega_n]$とおく。$\omega$は２次無理数であるから、定理６より循環連分数として表される。したがって、ある番号m、$n (m > n)$に対して、$\omega_m = \omega_n$が成立する。ここで、$n = 0$であれば、ωは純循環連分数展開されることになるから、$n > 0$と仮定してよい。ここで、

$$\omega_{n-1} = k_{n-1} + \frac{1}{\omega_n}、\omega_{m-1} = k_{m-1} + \frac{1}{\omega_m}$$

であるから、$\omega_{n-1} - \omega_{m-1} = k_{n-1} - k_{m-1} \in \mathbb{Z}$が成立する。$\omega_j$と共役な２次無理数を$\omega'_j$とし、

$$\omega_{n-1} = \frac{-b_{n-1} + \sqrt{D}}{2a_{n-1}}、\omega_{m-1} = \frac{-b_{m-1} + \sqrt{D}}{2a_{m-1}}$$

とおくと、$\omega_{n-1} - \omega_{m-1} \in \mathbb{Z}$より、$\omega_{n-1} - \omega_{m-1}$の$\sqrt{D}$の係数は$0$でなければならない。すなわち、

$$\frac{\sqrt{D}}{2a_{n-1}} = \frac{\sqrt{D}}{2a_{m-1}}$$

である。したがって、ω_{n-1}、ω_{m-1}の共役

$$\omega'_{n-1} = \frac{-b_{n-1} - \sqrt{D}}{2a_{n-1}}、\omega'_{m-1} = \frac{-b_{m-1} - \sqrt{D}}{2a_{m-1}}$$

に対して、$\omega'_{n-1} - \omega'_{m-1} = \omega_{n-1} - \omega_{m-1} = k_{n-1} - k_{m-1} \in \mathbb{Z}$が成立する。一方、補題３より、$\omega_{n-1}$、$\omega_{m-1}$は簡約２次無理数であるから、

$$-1 < \omega'_{n-1} < 0、-1 < \omega'_{m-1} < 0$$

が成立する。したがって、$|\omega'_{n-1} - \omega'_{m-1}| < 1$となり、$\omega'_{n-1} - \omega'_{m-1}$が整数であることから、$\omega'_{n-1} - \omega'_{m-1} = 0$を得る。よって、$k_{n-1} = k_{m-1}$、したがって、$\omega_{n-1} = \omega_{m-1}$が成立する。

以上のことから、$\omega_m = \omega_n$ならば$\omega_{m-1} = \omega_{n-1}$も成立することが示された。これ

を繰り返すことにより、$\omega_0 = \omega_{m-n}$ が得られる。ゆえに、ω は純循環連分数として表される。

q.e.d.

（３）類数の有限性

定理２より、判別式 D を有する簡約２次形式の個数は有限である。これより、任意の２次形式が、ある簡約２次形式に対等であることを示せば類数 $h(D)$ の有限性が導かれる。２次形式が、ある簡約２次形式に対等であることを示すには、２次無理数が簡約２次無理数に対等であることを示せばよい。

定理９

任意の２次無理数は、ある簡約２次無理数に正に対等である。

proof

ξ を２次無理数とする。ξ の中間連分数を、

$$\xi = [k_0, k_1, ..., k_{n-1}, \xi_n]$$

とおく。定理６より、ある m 、$n(m>n)$ に対して、$\xi_n = \xi_m$ となる。このとき、

$$\xi = [k_0, k_1, ..., k_{n-1}, \xi_n] = [k_0, k_1, ..., k_{m-1}, \xi_m] = [k_0, k_1, ..., k_{m-1}, \xi_n]$$

であるから、

$$\xi_n = [k_n, ..., k_{m-1}, \xi_n]$$

となるので、ξ_n は純循環連分数に展開される。したがって、定理７より ξ_n は簡約２次無理数である。ここで、n が奇数のときは補題３より、ξ_{n+1} も簡約２次無理数であるから n を $n+1$ で置き換えて、n を偶数であると仮定してよい。このとき、

$$\xi = \frac{p_n\xi_n + p_{n-1}}{q_n\xi_n + q_{n-1}}、\quad p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n = 1$$

となるので、ξ と簡約２次無理数 ξ_n とが正に対等である。

q.e.d.

系１

任意の正の判別式 D に対して、$h(D)$ 、$h^+(D)$ は有限である。

定理１０

ξ を簡約２次無理数とし、その中間連分数を $\xi=[k_0,k_1,...,k_{n-1},\xi_n]$ とおく。また、ξ の連分数展開における最小周期を m とする。このとき、$\xi_0=\xi,\xi_1,...,\xi_{m-1}$ は互いに異なる対等な２次無理数であり、m が奇数であれば、$\xi_0,\xi_1,...,\xi_{m-1}$ は互いに正に対等である。また、m が偶数であれば、$\xi_0,\xi_2,...,\xi_{m-2}$ は互いに正に対等であるが、ξ と $\xi_1,\xi_3,...,\xi_{m-1}$ は負に対等となるが正に対等でない。

proof

$\xi_0,\xi_1,...,\xi_{m-1}$ は補題２、補題３より、互いに対等な簡約２次無理数である。また、m が ξ の連分数展開における最小周期であるから、$\xi_0,\xi_1,...,\xi_{m-1}$ は互いに異なる。補題２より、ξ と ξ_{2n} は正に対等である。m が奇数のときは、$\xi_n=\xi_{m+n}$ となるから、n が奇数であっても $m+n$ が偶数となり、ξ と $\xi_{m+n}=\xi_n$ が正に対等となる。したがって、m が奇数であれば、$\xi_0,\xi_1,...,\xi_{m-1}$ は互いに正に対等である。

m が偶数であるとする。補題２より、$\xi_0,\xi_2,...,\xi_{m-2}$ は互いに正に対等であり、ξ と $\xi_1,\xi_3,...,\xi_{m-1}$ は負に対等である。ここで、n が奇数で ξ と ξ_n が正に対等であると仮定する。このとき、定理４より共に偶数であるか、共に奇数であるような、r と s で $\xi_r=\xi_{n+s}$ となるものが存在する。このとき、$n+s-r$ は奇数であり、最小周期 m が偶数であることに矛盾する。したがって、n が奇数のとき、ξ と ξ_n は正に対等でない。

q.e.d.

定理１１

ξ を簡約２次無理数、その中間連分数を $\xi=[k_0,k_1,...,k_{n-1},\xi_n]$、連分数展開における最小周期を m とする。このとき、ξ に対等な簡約２次無理数は $\xi_0=\xi,\xi_1,...,\xi_{m-1}$ に限る。

proof

η を ξ に対等な簡約２次無理数とし、その中間連分数を $\eta=[u_0,u_1,...,u_{n-1},\eta_n]$ とおく。定理４より、$\xi_r=\eta_s$ となる番号 r、s が存在する。η は簡約２次無理数であるから、η_s のある中間連分数が $\eta_s=[u_j,u_{j+1},...,\eta]$ となる。ここで、$\eta_s=\xi_r$ であるから、η は $\xi_0=\xi,\xi_1,...,\xi_{m-1}$ のいずれかに一致する。ゆえに、ξ に対等な簡約２次無理数は $\xi_0=\xi,\xi_1,...,\xi_{m-1}$ に限る。

q.e.d.

4　類数の計算例

（１）$D=60$ の場合

$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ を判別式60の簡約２次形式とする。$\left[\sqrt{60}\right]=7$ であるから、定理２より、$b=-1,-2,-3,\ldots,-7$ である。また、$4ac=b^2-D$ であるから、b は偶数、$4ac=-56,-44,-24$ となる。これより、$ac=-14,-11,-6$ を得る。したがって、①を満たす (a,b,c) は次の４組である。

$(6,-6,-1)$、$(3,-6,-2)$、$(2,-6,-3)$、$(1,-6,-6)$

したがって、$f(x)$ は、

$$f_1(x,y)=6x^2-6xy-y^2、\ f_2(x,y)=3x^2-6xy-2y^2、$$

$$f_3(x,y)=2x^2-6xy-3y^2、\ f_4(x,y)=x^2-6xy-6y^2$$

のいずれかである。対応する簡約２次無理数は、

$$\xi_1=\frac{3+\sqrt{15}}{6}、\ \xi_2=\frac{3+\sqrt{15}}{3}、\ \xi_3=\frac{3+\sqrt{15}}{2}、\ \xi_4=3+\sqrt{15}$$

となり、連分数展開は、

$$\xi_1=\left[\overline{1,6}\right]、\ \xi_2=\left[\overline{2,3}\right]、\ \xi_3=\left[\overline{3,2}\right]、\ \xi_4=\left[\overline{6,1}\right]$$

である。したがって、定理１１より、$\xi_1\sim\xi_4$、$\xi_2\sim\xi_3$、$\xi_1\not\sim\xi_2$ となる。よって、$h(D)=2$ である。また、周期が偶数であるから、定理１０より、$h^+(D)=4$ である。

（２）$D=136$ の場合

$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ を判別式136の簡約２次形式とする。$\left[\sqrt{136}\right]=11$ であるから、定理２より、$b=-1,-2,-3,\ldots,-11$ である。また、$4ac=b^2-D$ より、$4ac=-132,-120,-100,-72,-36$ を得る。これより、$ac=-33,-30,-25,-18,-9$ となる。したがって、①を満たす (a,b,c) は次の１０組である。

$(5,-6,-5)$、$(5,-4,-6)$、$(6,-4,-5)$、$(2,-8,-9)$、$(3,-8,-6)$

$(6,-8,-3)$、$(9,-8,-2)$、$(1,-10,-9)$、$(3,-10,-3)$、$(9,-10,-1)$

したがって、$f(x)$ は、

$$f_1(x,y)=5x^2-6xy-5y^2、\ f_2(x,y)=5x^2-4xy-6y^2、$$

$$f_3(x,y)=6x^2-4xy-5y^2、\ f_4(x,y)=2x^2-8xy-9y^2$$

$$f_5(x,y)=3x^2-8xy-6y^2、\ f_6(x,y)=6x^2-8xy-3y^2、$$

$$f_7(x,y)=9x^2-8xy-2y^2、\ f_8(x,y)=x^2-10xy-9y^2$$

$$f_9(x,y)=3x^2-10xy-3y^2、\ f_{10}(x,y)=9x^2-10xy-y^2$$

のいずれかである。対応する簡約２次無理数は、

$$\xi_1=\frac{3+\sqrt{34}}{5}、\ \xi_2=\frac{2+\sqrt{34}}{5}、\ \xi_3=\frac{2+\sqrt{34}}{6}、\ \xi_4=\frac{4+\sqrt{34}}{2}$$

$$\xi_5=\frac{4+\sqrt{34}}{3}、\ \xi_6=\frac{4+\sqrt{34}}{6}、\ \xi_7=\frac{4+\sqrt{34}}{9}、\ \xi_8=5+\sqrt{34}$$

$$\xi_9=\frac{5+\sqrt{34}}{3}、\ \xi_{10}=\frac{5+\sqrt{34}}{9}$$

となり、連分数展開は、

$$\xi_1=\left[\overline{1,1,3,3,1,1}\right]、\ \xi_2=\left[\overline{1,1,1,3,3,1}\right]、\ \xi_3=\left[\overline{1,3,3,1,1,1}\right]、\ \xi_4=\left[\overline{4,1,10,1}\right]$$

$$\xi_5=\left[\overline{3,3,1,1,1,1}\right]、\ \xi_6=\left[\overline{1,1,1,1,3,3}\right]、\ \xi_7=\left[\overline{1,10,1,4}\right]、\ \xi_8=\left[\overline{10,1,4,1}\right]$$

$$\xi_9=\left[\overline{3,1,1,1,1,3}\right]、\ \xi_{10}=\left[\overline{1,4,1,10}\right]$$

である。したがって、定理１１より、

$$\xi_1\sim\xi_2\sim\xi_3\sim\xi_5\sim\xi_6\sim\xi_9、\ \xi_4\sim\xi_7\sim\xi_8\sim\xi_{10}、\ \xi_1\not\sim\xi_4$$

となる。よって、$h(D)=2$である。また、周期が偶数であるから、定理１０より、$h^+(D)=4$である。

補遺には、いくつかの正の非平方数Dに対して、判別式Dを有する簡約２次形式および類数、狭義の類数を決定したものを載せた。

5　結　　言

本稿では、簡約２次形式、簡約２次無理数を定義し、判別式Dの簡約２次形式が有限個であること、任意の２次形式がある簡約２次形式に対等であることを示した。また、任意の２次無理数がある簡約２次無理数に正に対等であることを示すことで、正の判別式を有する２次形式の類数が有限であることを導いた。これらを検討する際、特に連分数は強力な道具となった。本稿も含め、これまでに発表してきた２次形式に関する考察を踏まえて、今後、２次形式による整数の表示問題について考察する予定である。

参 考 文 献

１）高木貞治「初等整数論講義」共立出版.
２）河田敬義「数論」岩波書店.
３）ディリクレ・デデキント「整数論講義」（酒井孝一　訳）共立出版.
４）Ｃ．Ｆ．ガウス「ガウス整数論」（高瀬正仁　訳）朝倉書店.
５）W.J.Leveque「*Topics in number theory*」Dover.
６）D.B.Zagier「*Zetafunktionen und quadratische korper*」Springer-Verlag.
７）髙倉　亘「$\sqrt{n}$ の連分数展開に関する考察」数学のいずみＨＰ.
８）髙倉　亘「２次形式と２次代数的数に関する考察」数学のいずみＨＰ.
９）髙倉　亘「負の判別式を有する簡約２次形式に関する考察」数学のいずみＨＰ.

＜ 補　遺 ＞　正の判別式を有する簡約２次形式の例および類数 $h(D)$、狭義の類数 $h^+(D)$

D	簡約2次形式	簡約2次無理数	連分数展開	$h(D)$	$h^+(D)$
5	$f(x,y)=x^2-xy-y^2$	$\xi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\xi=[\overline{1}]$	1	1
8	$f(x,y)=x^2-2xy-y^2$	$\xi=1+\sqrt{2}$	$\xi=[\overline{2}]$	1	1
12	$f_1(x,y)=2x^2-2xy-y^2$	$\xi_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$\xi_1=[\overline{1,2}]$	1	2
	$f_2(x,y)=x^2-2xy-2y^2$	$\xi_2=1+\sqrt{3}$	$\xi_2=[\overline{2,1}]$		
13	$f(x,y)=x^2-3xy-y^2$	$\xi=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	$\xi=[\overline{3}]$	1	1
17	$f_1(x,y)=x^2-3xy-2y^2$	$\xi_1=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$	$\xi_1=[\overline{3,1,1}]$	1	1
	$f_2(x,y)=2x^2-xy-2y^2$	$\xi_2=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$	$\xi_2=[\overline{1,3,1}]$		
	$f_3(x,y)=2x^2-3xy-y^2$	$\xi_3=\frac{3+\sqrt{17}}{4}$	$\xi_3=[\overline{1,1,3}]$		
20	$f_1(x,y)=2x^2-2xy-2y^2$	$\xi_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\xi_1=[\overline{1}]$	2	2
	$f_2(x,y)=x^2-4xy-y^2$	$\xi_2=2+\sqrt{5}$	$\xi_2=[\overline{4}]$		
21	$f_1(x,y)=x^2-3xy-3y^2$	$\xi_1=\frac{3+\sqrt{21}}{2}$	$\xi_1=[\overline{3,1}]$	1	2
	$f_2(x,y)=3x^2-3xy-y^2$	$\xi_2=\frac{3+\sqrt{21}}{6}$	$\xi_2=[\overline{1,3}]$		
24	$f_1(x,y)=x^2-4xy-2y^2$	$\xi_1=2+\sqrt{6}$	$\xi_1=[\overline{4,2}]$	1	2
	$f_2(x,y)=2x^2-4xy-y^2$	$\xi_2=\frac{2+\sqrt{6}}{2}$	$\xi_2=[\overline{2,4}]$		
28	$f_1(x,y)=x^2-4xy-3y^2$	$\xi_1=2+\sqrt{7}$	$\xi_1=[\overline{4,1,1,1}]$	1	2
	$f_2(x,y)=2x^2-2xy-3y^2$	$\xi_2=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$	$\xi_2=[\overline{1,1,4,1}]$		
	$f_3(x,y)=3x^2-2xy-2y^2$	$\xi_3=\frac{1+\sqrt{7}}{3}$	$\xi_3=[\overline{1,4,1,1}]$		
	$f_4(x,y)=3x^2-4xy-y^2$	$\xi_4=\frac{2+\sqrt{7}}{3}$	$\xi_4=[\overline{1,1,1,4}]$		
29	$f(x,y)=x^2-5xy-y^2$	$\xi=\frac{5+\sqrt{29}}{2}$	$\xi=[\overline{5}]$	1	1
32	$f_1(x,y)=x^2-4xy-4y^2$	$\xi_1=2+2\sqrt{2}$	$\xi_1=[\overline{4,1}]$	2	3
	$f_2(x,y)=2x^2-4xy-2y^2$	$\xi_2=1+\sqrt{2}$	$\xi_2=[\overline{2}]$		
	$f_3(x,y)=4x^2-4xy-y^2$	$\xi_3=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	$\xi_3=[\overline{1,4}]$		
33	$f_1(x,y)=2x^2-3xy-3y^2$	$\xi_1=\frac{3+\sqrt{33}}{4}$	$\xi_1=[\overline{2,5,2,1}]$	1	2
	$f_2(x,y)=3x^2-3xy-2y^2$	$\xi_2=\frac{3+\sqrt{33}}{6}$	$\xi_2=[\overline{1,2,5,2}]$		
	$f_3(x,y)=x^2-5xy-2y^2$	$\xi_3=\frac{5+\sqrt{33}}{2}$	$\xi_3=[\overline{5,2,1,2}]$		
	$f_4(x,y)=2x^2-5xy-y^2$	$\xi_4=\frac{5+\sqrt{33}}{4}$	$\xi_4=[\overline{2,1,2,5}]$		
37	$f_1(x,y)=3x^2-xy-3y^2$	$\xi_1=\frac{1+\sqrt{37}}{6}$	$\xi_1=[\overline{1,5,1}]$	1	1
	$f_2(x,y)=x^2-5xy-3y^2$	$\xi_2=\frac{5+\sqrt{37}}{2}$	$\xi_2=[\overline{5,1,1}]$		
	$f_3(x,y)=3x^2-5xy-y^2$	$\xi_3=\frac{5+\sqrt{37}}{6}$	$\xi_3=[\overline{1,1,5}]$		
40	$f_1(x,y)=3x^2-2xy-3y^2$	$\xi_1=\frac{1+\sqrt{10}}{3}$	$\xi_1=[\overline{1,2,1}]$	2	2
	$f_2(x,y)=2x^2-4xy-3y^2$	$\xi_2=\frac{2+\sqrt{10}}{2}$	$\xi_2=[\overline{2,1,1}]$		
	$f_3(x,y)=3x^2-4xy-2y^2$	$\xi_3=\frac{2+\sqrt{10}}{3}$	$\xi_3=[\overline{1,1,2}]$		
	$f_4(x,y)=x^2-6xy-y^2$	$\xi_4=3+\sqrt{10}$	$\xi_4=[\overline{6}]$		