

正の判別式を有する簡約2次形式に関する考察

北海道千歳北陽高等学校 教諭 高 倉 亘

(Keywords: 2次形式、2次無理数、判別式、連分数、類数)

1 緒 言

本稿では、正の判別式 D に対する類数が有限であることを示す。したがって、本稿における2次形式の判別式は正かつ非平方数であるものとする。まず、簡約2次形式、簡約2次無理数を定義し、判別式 D の簡約2次形式が有限個であること、任意の2次形式がある簡約2次形式に対等であることを示す。次に、2次無理数、簡約2次無理数がそれぞれ循環連分数、純循環連分数で表されること、任意の2次無理数がある簡約2次無理数に正に対等であることを示す。これより、正の判別式を有する2次形式の類数が有限であることが導かれる。また、最小周期が m の簡約2次無理数 ξ の中間連分数を、 $\xi = [k_0, k_1, \dots, k_{n-1}, \xi_n]$ ($n = 1, 2, \dots, m-1$) としたとき、 ξ と対等な簡約2次無理数が、 $\xi_0 = \xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}$ のみであることを証明する。これは、狭義の類数を計算する方法の根拠となる。最後にいくつかの正の判別式の値に対して簡約2次形式と類数を求める計算例を示す。

2 簡約2次形式と簡約2次無理数^{1) - 9)}

2次形式 $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ が簡約2次形式であるとは、条件

$$a > 0, b < 0, c < 0, a + b + c < 0, a - b + c > 0 \quad \dots$$

を満たすときという。 $f(x, y)$ に対応する2次式を $g(x) = ax^2 + bx + c$ とおけば、

$$g(1) = a + b + c, g(0) = c, g(-1) = a - b + c$$

である。したがって、 (1) が成立しているときは、

$$a > 0, g(0) < 0, g(1) < 0, g(-1) > 0 \quad \dots$$

が成立する。逆に、 (2) が成立していると仮定すれば、

$$a > 0, c = g(0) < 0, a + b + c = g(1) < 0, a - b + c = g(-1) > 0$$

が成立する。また、 $2b = g(1) - g(-1) < 0$ より、 $b < 0$ も得られるから、 (1) が成立する。よって、 (1) と (2) は同値である。

2次式 $g(x) = ax^2 + bx + c$ の第1根を ξ 、第2根を ξ' とおくと、

$$\xi = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \xi' = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

である。 (1) が成立するときは、

$$\xi > 1, 0 > \xi' > -1 \quad \text{すなわち、} \xi > 1 > -\xi' > 0 \quad \dots$$

が成立する。逆に、 $\frac{\sqrt{D}}{a} = \xi - \xi' > 0$ より、 $a > 0$ が得られるので、

$$g(-1) > 0, \quad g(0) < 0, \quad g(1) < 0$$

が成立する。以上から次の補題を得る。

補題 1

2次形式 $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ が簡約2次形式であるための必要十分条件は、 $\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} > 1 > \frac{b + \sqrt{D}}{2a} > 0$ が成立することである。

判別式が正の整係数既約2次式 $g(x) = ax^2 + bx + c$ の第1根 ξ 、第2根 ξ' が、 $\xi > 1 > -\xi' > 0$ を満たすとき、 ξ を既約2次無理数と呼ぶことにする。補題1より、次の定理が成立する。

定理 1

2次形式 $f(x, y)$ に対応する2次式の第1根を ξ とする。このとき、 $f(x, y)$ が簡約2次形式となるための必要十分条件は、 ξ が簡約2次無理数となることである。

定理 2

与えられた判別式 D を有する簡約2次形式の個数は有限である。

proof

$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ が判別式 D を有する簡約2次形式であるとき、補題1より $b + \sqrt{D} > 0$ が成立する。これより、 $\sqrt{D} > -b = |b|$ を得る。したがって、 b のとり得る値は有限個であり、それぞれの値に対して、 $4ac = b^2 - D$ で定まる a, c も有限個である。ゆえに、与えられた判別式 D を有する簡約2次形式は有限個である。

q.e.d.

3 2次無理数の連分数展開と類数の有限性

(1) 2次無理数の対等と連分数展開

modular 変換は2次代数的数のなす集合の上の変換を引き起こす。特殊1次変換の成分は整数であるから、*modular* 変換は実数を実数に移す。実数である2次代数的数が2次無理数であるから、*modular* 変換は2次無理数のなす集合上の変換を引き起こす。同様にして、*modular* 変換が無理数のなす集合上の変換を引き

起こす。ここで、 ω を 2 次無理数とすると、

$$\omega = [k_0, k_1, \dots, k_{n-1}, \omega_n] = \frac{p_n \omega_n + p_{n-1}}{q_n \omega_n + q_{n-1}}, \quad p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n$$

と表される。上に述べたことから、 ω_n も 2 次無理数である。また、次の補題が成立することも、上式から明らかである。

補題 2

ω を 2 次無理数とし、連分数展開において、 $\omega = [k_0, k_1, \dots, k_{n-1}, \omega_n]$ と表されたとする。 n が偶数ならば ω と ω_n は正に対等であり、 n が奇数ならば ω と ω_n は負に対等である。

定理 3

無理数 ξ と η に対して、

$$\eta = T(\xi) = \frac{r\xi + s}{t\xi + u}, \quad T = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \in SL(\mathbb{Z})^\pm, \quad t > u > 0, \quad \xi > 1$$

となる T が存在するものと仮定する。このとき、ある n が存在して、

$$\eta = [k_0, k_1, \dots, k_{n-1}, \xi], \quad r = p_n, \quad s = p_{n-1}, \quad t = q_n, \quad u = q_{n-1}$$

が成立する。更に、 $|T| = 1$ ならば n は偶数、 $|T| = -1$ ならば n は奇数である。

proof

有理数 $\frac{r}{t}$ の連分数展開を、 $\frac{r}{t} = [k_0, k_1, \dots, k_{n-1}]$ とする。

仮定より、 $t > u > 0$ であるから、 $t > 1$ である。また、 $ru - st = \pm 1$ より、 $(r, t) = 1$ となる。したがって、 $r \neq 0$ である。これより、 $n \geq 2$ となる。ここで、

$$T_j = \begin{pmatrix} k_j & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \prod_{m=0}^{j-1} T_m = \begin{pmatrix} p_j & p_{j-1} \\ q_j & q_{j-1} \end{pmatrix}$$

とおけば、

$$\frac{r}{t} = [k_0, k_1, \dots, k_{n-1}] = \frac{p_{n-1} k_{n-1} + p_{n-2}}{q_{n-1} k_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n}$$

となる。ここで、 $(p_n, q_n) = 1$ 、 $q_n > 0$ であるので、 $\frac{r}{t} = \frac{p_n}{q_n}$ より、 $r = p_n$ 、 $t = q_n$

を得る。一方、 n を偶数にも奇数にもすることができるので、 $|T|$ の値に応じて n を

定め直し、

$$ru - st = p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n \cdots$$

となるようにできる。このとき、

$$ru - st = p_n u - q_n s = p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n$$

が成立する。したがって、

$$p_n(u - q_{n-1}) = q_n(s - p_{n-1})$$

を得る。このとき、 $q_n | u - q_{n-1}$ となるが、 $q_n = t > u > 0$ であり、また、 $n \geq 2$ である

ことから、 $q_n \geq q_{n-1} > 0$ となるので、 $|u - q_{n-1}| < q_n$ が成立する。したがって、

$u = q_{n-1}$ 、 $s = p_{n-1}$ を得る。以上から、

$$[k_0, k_1, \dots, k_{n-1}, \xi] = \frac{p_n \xi + p_{n-1}}{q_n \xi + q_{n-1}} = \frac{r\xi + s}{t\xi + u} = \eta$$

が成立する。すなわち、 $[k_0, k_1, \dots, k_{n-1}, \xi]$ は η の中間連分数である。また、 q_j は j に

ついて単調増加であるから、 $t = q_n$ となる n は一意に定まる。 $|T| = 1$ ならば n が偶

数、 $|T| = -1$ ならば n が奇数になることは、より明らかである。

q.e.d.

$\eta = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$ 、 $\xi = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$ とおくと、 $\eta = [1, \xi] = [1, 3, 1, 1, \xi]$ となる。したがって、 η と ξ は正にも負にも対等であり、定理 3 における n の偶奇は η と ξ だけからは定まらない。

定理 4

無理数 ξ 、 η が対等であるとする。このとき、 ξ 、 η の中間連分数

$$\xi = [k_0, k_1, \dots, k_{\ell-1}, \xi_{\ell}], \quad \eta = [h_0, h_1, \dots, h_{m-1}, \eta_m]$$

で、 $\xi_{\ell} = \eta_m$ となるものが存在する。ここで、 ξ と η が正に対等であれば、 ℓ 、 m ともに偶数、あるいは、ともに奇数となるようにできる。また、 ξ と η が負に対等であれば、 ℓ 、 m の一方は偶数、他方は奇数となるようにできる。

proof

ξ と η が対等であることから、

$$\eta = T(\xi) = \frac{r\xi + s}{t\xi + u}, \quad T = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \in SL(\mathbb{Z})^\pm$$

を満たす T が存在する。ここで、 T を $-T$ で置き換えて、 $t\xi + u > 0$ とできる。

$|-T| = |T|$ より、 T の正負は不変である。 ξ の中間連分数を、

$$\xi = [k_0, k_1, \dots, k_{n-1}, \xi_n] = \frac{p_n \xi_n + p_{n-1}}{q_n \xi_n + q_{n-1}}$$

とする。このとき、

$$\eta = T(\xi) = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} (\xi_n)$$

となる。ここで、

$$\begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\eta = \frac{A_n \xi_n + B_n}{C_n \xi_n + D_n} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} (\xi_n), \quad \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} \in SL(\mathbb{Z})^\pm$$

となる。ここで、

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

が成立するから、

$$\left| \xi q_n - p_n \right| < \frac{q_n}{q_{n+1}}, \quad \frac{q_n}{q_{n+1}} < 1$$

となる。したがって、 $p_n = \xi q_n + \frac{\delta_n}{q_n}$ 、 $|\delta_n| < 1$ と表すことができる。このとき、

$$C_n = t p_n + u q_n = t \left(\xi q_n + \frac{\delta_n}{q_n} \right) + u q_n = (t\xi + u) q_n + \frac{t\delta_n}{q_n},$$

$$D_n = t p_{n-1} + u q_{n-1} = (t\xi + u) q_{n-1} + \frac{t\delta_{n-1}}{q_{n-1}}$$

となる。一方、 $t\xi + u > 0$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$ であるから、十分大きい ℓ をとると、

$$q_\ell > q_{\ell-1} > 0 \text{ かつ、 } \left| \frac{t\delta_{\ell-1}}{q_{\ell-1}} - \frac{t\delta_\ell}{q_\ell} \right| < t\xi + u$$

とすることができる。このとき、 $C_\ell > D_\ell > 0$ となるので、

$$\eta = \frac{A_\ell \xi_\ell + B_\ell}{C_\ell \xi_\ell + D_\ell}, \quad (C_\ell > D_\ell > 0, \xi_\ell > 1)$$

が成立する。したがって、定理 3 より、ある m に対して、

$$\eta = [h_0, h_1, \dots, h_{m-1}, \xi_\ell]$$

が成立する。

ξ と η が正に対等の場合は ℓ を偶数にとると ξ と ξ_ℓ は正に対等となる。したがって、 η と ξ_ℓ は正に対等となるから、定理 3 より m は偶数にできる。また、 ℓ を奇数にとると、 ξ と ξ_ℓ は負に対等となるから η と ξ_ℓ も負に対等となるので、 m を奇数にできる。

ξ と η が負に対等の場合は ℓ を偶数にとると ξ と ξ_ℓ は正に対等、 η と ξ_ℓ は負に対等となる。したがって、定理 3 より m は偶数にできる。また、 ℓ を奇数にとると、 ξ と ξ_ℓ は負に対等、 η と ξ_ℓ は正に対等となるから m は奇数にできる。

q.e.d.

(2) 循環連分数

無限連分数

$$\omega = [k_0, k_1, \dots, k_n, \dots]$$

に対して、ある自然数 m, ℓ が存在して、 $n > \ell$ のとき $k_{n+m} = k_n$ が成立するとき、この無限連分数を周期 m の循環連分数という。このことは、無理数 ω の中間連分数

$$\omega = [k_0, k_1, \dots, k_{n-1}, \omega_n]$$

が、 $n > \ell$ のとき、 $\omega_{n+m} = \omega_n$ を満たすことと同値である。特に、上の関係を満たす m の中で、最小のものを最小周期という。周期が最小周期の倍数になることは明らかである。

例えば、

$$\omega = [k_0, k_1, \dots, k_\ell, h_1, h_2, \dots, h_m, h_1, h_2, \dots, h_m, h_1, h_2, \dots]$$

は周期 m の循環連分数である。以下これを、

$$\omega = [k_0, k_1, \dots, k_\ell, \overline{h_1, h_2, \dots, h_m}]$$

と表すことにする。特に、

$$\omega = [\overline{k_0, k_1, \dots, k_\ell}]$$

となるとき、この循環連分数を純循環連分数という。

定理 5

無理数 ω が循環連分数として表現されるならば、 ω は 2 次無理数である。

proof

ω が循環連分数として表されることから、ある m 、 ℓ が存在して、

$$\omega = [k_0, k_1, \dots, k_\ell, \overline{h_1, \dots, h_m}]$$

と表すことができる。ここで、

$$\eta = [\overline{h_1, h_2, \dots, h_m}]$$

とおくと、補題 2 より、 ω と η は対等である。一方、 $\eta = [h_1, \dots, h_m, \eta]$ であるから、

$$\eta = \frac{r\eta + s}{t\eta + u}, \quad \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \in SL(\mathbb{Z})^\pm, \quad t > 0$$

と表すことができる。このとき、

$$t\eta^2 + (u - r)\eta - s = 0, \quad t > 0$$

が成立するので、 η は 2 次無理数である。したがって、 η と対等な ω も 2 次無理数である。

q.e.d.

定理 6

2 次無理数 ω は循環連分数として表現される。

proof

ω を 2 次無理数とすると、

$$a\omega^2 + b\omega + c = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

を満たす整数 $a \neq 0$ 、 b 、 c が存在する。一方、 ω の中間連分数は、

$$\omega = [k_0, k_1, \dots, k_{n-1}, \omega_n] = \frac{p_n \omega_n + p_{n-1}}{q_n \omega_n + q_{n-1}}$$

と表すことができる。これを $a\omega^2 + b\omega + c = 0$ に代入し、 $(q_n \omega_n + q_{n-1})^2$ 倍して、

$$\begin{aligned} 0 &= (p_n \omega_n + p_{n-1} \quad q_n \omega_n + q_{n-1}) \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \omega_n + p_{n-1} \\ q_n \omega_n + q_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= (\omega_n \quad 1) \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_n \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (\omega_n \quad 1) \begin{pmatrix} A_n & \frac{B_n}{2} \\ \frac{B_n}{2} & C_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_n \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とおく。このとき、成分を比較すると次式が成立する。

$$A_n = ap_n^2 + bp_n q_n + cq_n^2$$

$$B_n = 2ap_n p_{n-1} + b(p_n q_{n-1} + p_{n-1} q_n) + 2cq_n q_{n-1}$$

$$C_n = ap_{n-1}^2 + bp_{n-1} q_{n-1} + cq_{n-1}^2$$

$$B_n^2 - 4A_n C_n = b^2 - 4ac$$

一方、 $\left| \omega - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$ が成立するから、 $p_n = \omega q_n + \frac{\delta_n}{q_n}$ ($|\delta_n| < 1$) と表すことがで

きる。これより、

$$\begin{aligned} A_n &= a \left(\omega q_n + \frac{\delta_n}{q_n} \right)^2 + b q_n \left(\omega q_n + \frac{\delta_n}{q_n} \right) + c q_n^2 \\ &= (a\omega^2 + b\omega + c) q_n^2 + (2a\omega + b) \delta_n + a \left(\frac{\delta_n^2}{q_n^2} \right) \end{aligned}$$

となるが、 $a\omega^2 + b\omega + c = 0$ であるから、

$$A_n = (2a\omega + b)\delta_n + a \left(\frac{\delta_n^2}{q_n^2} \right) \text{より、} |A_n| < 2|a\omega| + |b| + |a|$$

を得る。同様に、

$$|C_n| < 2|a\omega| + |a| + |b|$$

が得られ、これより、

$$B_n^2 = 4A_n C_n + (b^2 - 4ac) \leq 4(2|a\omega| + |a| + |b|)^2 + |b^2 - 4ac|$$

も導かれる。以上から、整数 A_n 、 B_n 、 C_n は n によらず有界である。したがって、

$$(A_p, B_p, C_p) = (A_q, B_q, C_q) = (A_r, B_r, C_r)$$

となる相異なる番号 p 、 q 、 r が存在する。このとき、 ω_p 、 ω_q 、 ω_r はすべて 2 次方程式

$$A_p x^2 + B_p x + C_p = 0$$

の根であるから、そのうちの 2 つは一致する。それを、 $\omega_p = \omega_q$ 、 $p < q$ であるとする。このとき、 ω の中間連分数は、

$$\omega = [k_0, k_1, \dots, k_{p-1}, \omega_p] = [k_0, k_1, \dots, k_{p-1}, \dots, k_{q-1}, \omega_p]$$

となる。よって、2 次無理数 ω は循環連分数展開をもつ。

q.e.d.

定理 7

純循環連分数として表現される無理数 ω は簡約 2 次無理数である。

proof

ω は循環連分数として表されるので、定理 7 より 2 次無理数である。したがって、簡約性を示せばよい。 ω は純循環連分数として表されるので、ある n に対して、

$$\omega = [k_0, k_1, \dots, k_{n-1}, \omega]$$

となる。このとき、 $\omega = \frac{p_n \omega + p_{n-1}}{q_n \omega + q_{n-1}}$ となるので、

$$q_n \omega^2 + (q_{n-1} - p_n) \omega - p_{n-1} = 0$$

が成立する。これより、

$$g(x) = q_n x^2 + (q_{n-1} - p_n)x - p_{n-1} = 0$$

が成立する。

一方、 $p_1 = k_0 \geq q_1 = 1$ と $p_{n+1} = p_n k_n + p_{n-1}$ 、 $q_{n+1} = q_n k_n + q_{n-1}$ より、 $n \geq 1$ のとき、 $p_n > q_n > 0$ が成立する。したがって、

$$g(1) = q_n + q_{n-1} - p_n - p_{n-1} = q_n \left(1 - \frac{p_n}{q_n}\right) + q_{n-1} \left(1 - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right) < 0$$

が成立する。以上のことから、 ω は簡約 2 次無理数である。

q.e.d.

補題 3

簡約 2 次無理数 ω の中間連分数を、 $\omega = [k_0, k_1, \dots, k_{n-1}, \omega_n]$ ($n = 1, 2, \dots$) とする。このとき、 $\omega_1, \omega_2, \dots$ は、すべて簡約 2 次無理数である。

proof

仮定より、 ω を根としてもつ簡約 2 次式 $g(x)$ が存在する。このとき、次のことが成立する。

$$g(x) = ax^2 + bx + c, \quad g(\omega) = 0, \quad a > 0, \quad g(-1) > 0, \quad g(0) < 0, \quad g(1) < 0$$

ここで、 $\omega = k_0 + \frac{1}{\omega_1}$ を $g(\omega) = 0$ に代入して、 ω_1^2 倍すれば、

$$(ak_0^2 + bk_0 + c)\omega_1^2 + (2ak_0 + b)\omega_1 + a = 0$$

となる。また、

$$A = -(ak_0^2 + bk_0 + c), \quad B = -(2ak_0 + b), \quad C = -a, \quad h(x) = Ax^2 + Bx + C$$

とおけば、 $h(\omega_1) = 0$ が成立する。

一方、 $1 \leq k_0 = [\omega]$ より、 $0 \leq k_0 - 1 < k_0 < \omega < k_0 + 1$ であるから、

$$g(k_0 - 1) < 0, \quad g(k_0) < 0, \quad g(k_0 + 1) > 0$$

が成立する。これより、 $A = -g(k_0) > 0$ であり、

$$h(1) = -g(k_0 + 1) < 0, \quad h(-1) = -g(k_0 - 1) > 0, \quad h(0) = -a < 0$$

となるので、 h は簡約 2 次式である。ゆえに、 ω_1 は簡約 2 次無理数である。 $\omega_2, \omega_3, \dots$ についても同様である。

q.e.d.

定理 8

簡約 2 次無理数 ω は純循環連分数として表現される。

proof

ω は簡約 2 次無理数であるから、 $\omega > 1$ を満たす。したがって、 $k_0 \geq 1$ が成立する。 ω の中間連分数を、 $\omega = [k_0, k_1, \dots, k_{n-1}, \omega_n]$ とおく。 ω は 2 次無理数であるから、定理 6 より循環連分数として表される。したがって、ある番号 m 、 $n (m > n)$ に対して、 $\omega_m = \omega_n$ が成立する。ここで、 $n = 0$ であれば、 ω は純循環連分数展開されることになるから、 $n > 0$ と仮定してよい。ここで、

$$\omega_{n-1} = k_{n-1} + \frac{1}{\omega_n}, \quad \omega_{m-1} = k_{m-1} + \frac{1}{\omega_m}$$

であるから、 $\omega_{n-1} - \omega_{m-1} = k_{n-1} - k_{m-1} \in \mathbb{Z}$ が成立する。 ω_j と共役な 2 次無理数を ω'_j とし、

$$\omega_{n-1} = \frac{-b_{n-1} + \sqrt{D}}{2a_{n-1}}, \quad \omega_{m-1} = \frac{-b_{m-1} + \sqrt{D}}{2a_{m-1}}$$

とおくと、 $\omega_{n-1} - \omega_{m-1} \in \mathbb{Z}$ より、 $\omega_{n-1} - \omega_{m-1}$ の \sqrt{D} の係数は 0 でなければならない。すなわち、

$$\frac{\sqrt{D}}{2a_{n-1}} = \frac{\sqrt{D}}{2a_{m-1}}$$

である。したがって、 ω_{n-1} 、 ω_{m-1} の共役

$$\omega'_{n-1} = \frac{-b_{n-1} - \sqrt{D}}{2a_{n-1}}, \quad \omega'_{m-1} = \frac{-b_{m-1} - \sqrt{D}}{2a_{m-1}}$$

に対して、 $\omega'_{n-1} - \omega'_{m-1} = \omega_{n-1} - \omega_{m-1} = k_{n-1} - k_{m-1} \in \mathbb{Z}$ が成立する。一方、補題 3 より、 ω_{n-1} 、 ω_{m-1} は簡約 2 次無理数であるから、

$$-1 < \omega'_{n-1} < 0, \quad -1 < \omega'_{m-1} < 0$$

が成立する。したがって、 $|\omega'_{n-1} - \omega'_{m-1}| < 1$ となり、 $\omega'_{n-1} - \omega'_{m-1}$ が整数であることから、 $\omega'_{n-1} - \omega'_{m-1} = 0$ を得る。よって、 $k_{n-1} = k_{m-1}$ 、したがって、 $\omega_{n-1} = \omega_{m-1}$ が成立する。

以上のことから、 $\omega_m = \omega_n$ ならば $\omega_{m-1} = \omega_{n-1}$ も成立することが示された。これ

を繰り返すことにより、 $\omega_0 = \omega_{m-n}$ が得られる。ゆえに、 ω は純循環連分数として表される。

q.e.d.

(3) 類数の有限性

定理 2 より、判別式 D を有する簡約 2 次形式の個数は有限である。これより、任意の 2 次形式が、ある簡約 2 次形式に対等であることを示せば類数 $h(D)$ の有限性が導かれる。2 次形式が、ある簡約 2 次形式に対等であることを示すには、2 次無理数が簡約 2 次無理数に対等であることを示せばよい。

定理 9

任意の 2 次無理数は、ある簡約 2 次無理数に正に対等である。

proof

ξ を 2 次無理数とする。 ξ の中間連分数を、

$$\xi = [k_0, k_1, \dots, k_{n-1}, \xi_n]$$

とおく。定理 6 より、ある m 、 $n(m > n)$ に対して、 $\xi_n = \xi_m$ となる。このとき、

$$\xi = [k_0, k_1, \dots, k_{n-1}, \xi_n] = [k_0, k_1, \dots, k_{m-1}, \xi_m] = [k_0, k_1, \dots, k_{m-1}, \xi_n]$$

であるから、

$$\xi_n = [k_n, \dots, k_{m-1}, \xi_n]$$

となるので、 ξ_n は純循環連分数に展開される。したがって、定理 7 より ξ_n は簡約 2 次無理数である。ここで、 n が奇数のときは補題 3 より、 ξ_{n+1} も簡約 2 次無理数であるから n を $n+1$ で置き換えて、 n を偶数であると仮定してよい。このとき、

$$\xi = \frac{p_n \xi_n + p_{n-1}}{q_n \xi_n + q_{n-1}}, \quad p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n = 1$$

となるので、 ξ と簡約 2 次無理数 ξ_n とが正に対等である。

q.e.d.

系 1

任意の正の判別式 D に対して、 $h(D)$ 、 $h^+(D)$ は有限である。

定理 1 0

ξ を簡約 2 次無理数とし、その中間連分数を $\xi = [k_0, k_1, \dots, k_{n-1}, \xi_n]$ とおく。また、 ξ の連分数展開における最小周期を m とする。このとき、 $\xi_0 = \xi, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}$ は互いに異なる対等な 2 次無理数であり、 m が奇数であれば、 $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}$ は互いに正に對等である。また、 m が偶数であれば、 $\xi_0, \xi_2, \dots, \xi_{m-2}$ は互いに正に對等であるが、 ξ と $\xi_1, \xi_3, \dots, \xi_{m-1}$ は負に對等となるが正に對等でない。

proof

$\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}$ は補題 2、補題 3 より、互いに對等な簡約 2 次無理数である。また、 m が ξ の連分数展開における最小周期であるから、 $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}$ は互いに異なる。補題 2 より、 ξ と ξ_{2n} は正に對等である。 m が奇数のときは、 $\xi_n = \xi_{m+n}$ となるから、 n が奇数であっても $m+n$ が偶数となり、 ξ と $\xi_{m+n} = \xi_n$ が正に對等となる。したがって、 m が奇数であれば、 $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}$ は互いに正に對等である。

m が偶数であるとする。補題 2 より、 $\xi_0, \xi_2, \dots, \xi_{m-2}$ は互いに正に對等であり、 ξ と $\xi_1, \xi_3, \dots, \xi_{m-1}$ は負に對等である。ここで、 n が奇数で ξ と ξ_n が正に對等であると仮定する。このとき、定理 4 より共に偶数であるか、共に奇数であるような、 r と s で $\xi_r = \xi_{n+s}$ となるものが存在する。このとき、 $n+s-r$ は奇数であり、最小周期 m が偶数であることに矛盾する。したがって、 n が奇数のとき、 ξ と ξ_n は正に對等でない。

*q.e.d.***定理 1 1**

ξ を簡約 2 次無理数、その中間連分数を $\xi = [k_0, k_1, \dots, k_{n-1}, \xi_n]$ 、連分数展開における最小周期を m とする。このとき、 ξ に對等な簡約 2 次無理数は $\xi_0 = \xi, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}$ に限る。

proof

η を ξ に對等な簡約 2 次無理数とし、その中間連分数を $\eta = [u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, \eta_n]$ とおく。定理 4 より、 $\xi_r = \eta_s$ となる番号 r, s が存在する。 η は簡約 2 次無理数であるから、 η_s のある中間連分数が $\eta_s = [u_j, u_{j+1}, \dots, \eta]$ となる。ここで、 $\eta_s = \xi_r$ であるから、 η は $\xi_0 = \xi, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}$ のいずれかに一致する。ゆえに、 ξ に對等な簡約 2 次無理数は $\xi_0 = \xi, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}$ に限る。

q.e.d.

4 類数の計算例

(1) $D = 60$ の場合

$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ を判別式 60 の簡約 2 次形式とする。 $[\sqrt{60}] = 7$ である

から、定理 2 より、 $b = -1, -2, -3, \dots, -7$ である。また、 $4ac = b^2 - D$ であるから、 b は偶数、 $4ac = -56, -44, -24$ となる。これより、 $ac = -14, -11, -6$ を得る。したがって、 を満たす (a, b, c) は次の 4 組である。

$$(6, -6, -1), (3, -6, -2), (2, -6, -3), (1, -6, -6)$$

したがって、 $f(x)$ は、

$$f_1(x, y) = 6x^2 - 6xy - y^2, \quad f_2(x, y) = 3x^2 - 6xy - 2y^2,$$

$$f_3(x, y) = 2x^2 - 6xy - 3y^2, \quad f_4(x, y) = x^2 - 6xy - 6y^2$$

のいずれかである。対応する簡約 2 次無理数は、

$$\xi_1 = \frac{3 + \sqrt{15}}{6}, \quad \xi_2 = \frac{3 + \sqrt{15}}{3}, \quad \xi_3 = \frac{3 + \sqrt{15}}{2}, \quad \xi_4 = 3 + \sqrt{15}$$

となり、連分数展開は、

$$\xi_1 = [1, 6], \quad \xi_2 = [2, 3], \quad \xi_3 = [3, 2], \quad \xi_4 = [6, 1]$$

である。したがって、定理 1 1 より、 $\xi_1 \sim \xi_4$ 、 $\xi_2 \sim \xi_3$ 、 $\xi_1 \times \xi_2$ となる。よって、 $h(D) = 2$ である。また、周期が偶数であるから、定理 1 0 より、 $h^+(D) = 4$ である。

(2) $D = 136$ の場合

$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ を判別式 136 の簡約 2 次形式とする。 $[\sqrt{136}] = 11$ である

から、定理 2 より、 $b = -1, -2, -3, \dots, -11$ である。また、 $4ac = b^2 - D$ より、 $4ac = -132, -120, -100, -72, -36$ を得る。これより、 $ac = -33, -30, -25, -18, -9$ となる。したがって、 を満たす (a, b, c) は次の 10 組である。

$$(5, -6, -5), (5, -4, -6), (6, -4, -5), (2, -8, -9), (3, -8, -6)$$

$$(6, -8, -3), (9, -8, -2), (1, -10, -9), (3, -10, -3), (9, -10, -1)$$

したがって、 $f(x)$ は、

$$f_1(x, y) = 5x^2 - 6xy - 5y^2, \quad f_2(x, y) = 5x^2 - 4xy - 6y^2,$$

$$f_3(x, y) = 6x^2 - 4xy - 5y^2, \quad f_4(x, y) = 2x^2 - 8xy - 9y^2$$

$$f_5(x, y) = 3x^2 - 8xy - 6y^2, \quad f_6(x, y) = 6x^2 - 8xy - 3y^2,$$

$$f_7(x, y) = 9x^2 - 8xy - 2y^2, \quad f_8(x, y) = x^2 - 10xy - 9y^2$$

$$f_9(x, y) = 3x^2 - 10xy - 3y^2, \quad f_{10}(x, y) = 9x^2 - 10xy - y^2$$

のいずれかである。対応する簡約 2 次無理数は、

$$\xi_1 = \frac{3 + \sqrt{34}}{5}, \quad \xi_2 = \frac{2 + \sqrt{34}}{5}, \quad \xi_3 = \frac{2 + \sqrt{34}}{6}, \quad \xi_4 = \frac{4 + \sqrt{34}}{2}$$

$$\xi_5 = \frac{4 + \sqrt{34}}{3}, \quad \xi_6 = \frac{4 + \sqrt{34}}{6}, \quad \xi_7 = \frac{4 + \sqrt{34}}{9}, \quad \xi_8 = 5 + \sqrt{34}$$

$$\xi_9 = \frac{5 + \sqrt{34}}{3}, \quad \xi_{10} = \frac{5 + \sqrt{34}}{9}$$

となり、連分数展開は、

$$\xi_1 = [1, 1, 3, 3, 1, 1], \quad \xi_2 = [1, 1, 1, 3, 3, 1], \quad \xi_3 = [1, 3, 3, 1, 1, 1], \quad \xi_4 = [4, 1, 10, 1]$$

$$\xi_5 = [3, 3, 1, 1, 1, 1], \quad \xi_6 = [1, 1, 1, 1, 3, 3], \quad \xi_7 = [1, 10, 1, 4], \quad \xi_8 = [10, 1, 4, 1]$$

$$\xi_9 = [3, 1, 1, 1, 1, 3], \quad \xi_{10} = [1, 4, 1, 10]$$

である。したがって、定理 1.1 より、

$$\xi_1 \sim \xi_2 \sim \xi_3 \sim \xi_5 \sim \xi_6 \sim \xi_9, \quad \xi_4 \sim \xi_7 \sim \xi_8 \sim \xi_{10}, \quad \xi_1 \not\sim \xi_4$$

となる。よって、 $h(D) = 2$ である。また、周期が偶数であるから、定理 1.0 より、 $h^+(D) = 4$ である。

補遺には、いくつかの正の非平方数 D に対して、判別式 D を有する簡約 2 次形式および類数、狭義の類数を決定したものを載せた。

5 結 言

本稿では、簡約 2 次形式、簡約 2 次無理数を定義し、判別式 D の簡約 2 次形式が有限個であること、任意の 2 次形式がある簡約 2 次形式に対等であることを示した。また、任意の 2 次無理数がある簡約 2 次無理数に正に対等であることを示すことで、正の判別式を有する 2 次形式の類数が有限であることを導いた。これらを検討する際、特に連分数は強力な道具となった。本稿も含め、これまでに発表してきた 2 次形式に関する考察を踏まえて、今後、2 次形式による整数の表示問題について考察する予定である。

参考文献

- 1) 高木貞治「初等整数論講義」共立出版.
- 2) 河田敬義「数論」岩波書店.
- 3) ディリクレ・デデキント「整数論講義」(酒井孝一 訳)共立出版.
- 4) C . F . ガウス「ガウス整数論」(高瀬正仁 訳)朝倉書店.
- 5) W.J.Leveque「*Topics in number theory*」Dover.
- 6) D.B.Zagier「*Zetafunktionen und quadratische korper*」Springer-Verlag.
- 7) 高倉 亘「 \sqrt{n} の連分数展開に関する考察」数学のいずみHP.
- 8) 高倉 亘「2次形式と2次代数的数に関する考察」数学のいずみHP.
- 9) 高倉 亘「負の判別式を有する簡約2次形式に関する考察」数学のいずみHP.

< 補 遺 > 正の判別式を有する簡約2次形式の例および類数 $h(D)$ 、狭義の類数 $h^+(D)$

D	簡約2次形式	簡約2次無理数	連分数展開	$h(D)$	$h^+(D)$
5	$f(x, y) = x^2 - xy - y^2$	$\xi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\xi = [1]$	1	1
8	$f(x, y) = x^2 - 2xy - y^2$	$\xi = 1 + \sqrt{2}$	$\xi = [2]$	1	1
12	$f_1(x, y) = 2x^2 - 2xy - y^2$ $f_2(x, y) = x^2 - 2xy - 2y^2$	$\xi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\xi_2 = 1 + \sqrt{3}$	$\xi_1 = [1, 2]$ $\xi_2 = [2, 1]$	1	2
13	$f(x, y) = x^2 - 3xy - y^2$	$\xi = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$	$\xi = [3]$	1	1
17	$f_1(x, y) = x^2 - 3xy - 2y^2$ $f_2(x, y) = 2x^2 - xy - 2y^2$ $f_3(x, y) = 2x^2 - 3xy - y^2$	$\xi_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ $\xi_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$ $\xi_3 = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$	$\xi_1 = [3, 1, 1]$ $\xi_2 = [1, 3, 1]$ $\xi_3 = [1, 1, 3]$	1	1
20	$f_1(x, y) = 2x^2 - 2xy - 2y^2$ $f_2(x, y) = x^2 - 4xy - y^2$	$\xi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\xi_2 = 2 + \sqrt{5}$	$\xi_1 = [1]$ $\xi_2 = [4]$	2	2
21	$f_1(x, y) = x^2 - 3xy - 3y^2$ $f_2(x, y) = 3x^2 - 3xy - y^2$	$\xi_1 = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$ $\xi_2 = \frac{3+\sqrt{21}}{6}$	$\xi_1 = [3, 1]$ $\xi_2 = [1, 3]$	1	2
24	$f_1(x, y) = x^2 - 4xy - 2y^2$ $f_2(x, y) = 2x^2 - 4xy - y^2$	$\xi_1 = 2 + \sqrt{6}$ $\xi_2 = \frac{2+\sqrt{6}}{2}$	$\xi_1 = [4, 2]$ $\xi_2 = [2, 4]$	1	2
28	$f_1(x, y) = x^2 - 4xy - 3y^2$ $f_2(x, y) = 2x^2 - 2xy - 3y^2$ $f_3(x, y) = 3x^2 - 2xy - 2y^2$ $f_4(x, y) = 3x^2 - 4xy - y^2$	$\xi_1 = 2 + \sqrt{7}$ $\xi_2 = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$ $\xi_3 = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$ $\xi_4 = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$	$\xi_1 = [4, 1, 1, 1]$ $\xi_2 = [1, 1, 4, 1]$ $\xi_3 = [1, 4, 1, 1]$ $\xi_4 = [1, 1, 1, 4]$	1	2
29	$f(x, y) = x^2 - 5xy - y^2$	$\xi = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$	$\xi = [5]$	1	1
32	$f_1(x, y) = x^2 - 4xy - 4y^2$ $f_2(x, y) = 2x^2 - 4xy - 2y^2$ $f_3(x, y) = 4x^2 - 4xy - y^2$	$\xi_1 = 2 + 2\sqrt{2}$ $\xi_2 = 1 + \sqrt{2}$ $\xi_3 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$	$\xi_1 = [4, 1]$ $\xi_2 = [2]$ $\xi_3 = [1, 4]$	2	3
33	$f_1(x, y) = 2x^2 - 3xy - 3y^2$ $f_2(x, y) = 3x^2 - 3xy - 2y^2$ $f_3(x, y) = x^2 - 5xy - 2y^2$ $f_4(x, y) = 2x^2 - 5xy - y^2$	$\xi_1 = \frac{3+\sqrt{33}}{4}$ $\xi_2 = \frac{3+\sqrt{33}}{6}$ $\xi_3 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$ $\xi_4 = \frac{5+\sqrt{33}}{4}$	$\xi_1 = [2, 5, 2, 1]$ $\xi_2 = [1, 2, 5, 2]$ $\xi_3 = [5, 2, 1, 2]$ $\xi_4 = [2, 1, 2, 5]$	1	2
37	$f_1(x, y) = 3x^2 - xy - 3y^2$ $f_2(x, y) = x^2 - 5xy - 3y^2$ $f_3(x, y) = 3x^2 - 5xy - y^2$	$\xi_1 = \frac{1+\sqrt{37}}{6}$ $\xi_2 = \frac{5+\sqrt{37}}{2}$ $\xi_3 = \frac{5+\sqrt{37}}{6}$	$\xi_1 = [1, 5, 1]$ $\xi_2 = [5, 1, 1]$ $\xi_3 = [1, 1, 5]$	1	1
40	$f_1(x, y) = 3x^2 - 2xy - 3y^2$ $f_2(x, y) = 2x^2 - 4xy - 3y^2$ $f_3(x, y) = 3x^2 - 4xy - 2y^2$ $f_4(x, y) = x^2 - 6xy - y^2$	$\xi_1 = \frac{1+\sqrt{10}}{3}$ $\xi_2 = \frac{2+\sqrt{10}}{2}$ $\xi_3 = \frac{2+\sqrt{10}}{3}$ $\xi_4 = 3 + \sqrt{10}$	$\xi_1 = [1, 2, 1]$ $\xi_2 = [2, 1, 1]$ $\xi_3 = [1, 1, 2]$ $\xi_4 = [6]$	2	2