負の判別式を有する簡約2次形式に関する考察

北海道千歳北陽高等学校　教諭　髙　倉　　亘

（*Keywords*：　2次形式、　判別式、　対等、　基本領域、　類数　）

１　緒　　言

本稿では、負の判別式Dを有する簡約２次形式についてその類数が有限であることを示す。負の判別式を有する２次形式は、正と負の２種類に分類することができ、対等関係を考察する際、正の２次形式のみを検討すればよい。したがって、本稿では正の２次形式のみを扱う。

まず、簡約２次形式を定義し、与えられた判別式を有する簡約２次形式が有限個であることを示す。次に、正の２次形式が簡約２次形式であることと対応する２次形式の第１根が基本領域にあることとが同値であることを示す。更に、任意の与えられた正の２次形式に対してそれと正に対等な簡約２次形式が唯一つ存在することを示し、類数が有限であることを導く。これより、虚部が正の２次代数的数に正に対等な点が基本領域内に唯一つ存在することがわかる。[1)−8)] 最後に、いくつかの負の判別式の値に対して簡約２次形式を求める計算例を示す。

２　簡約２次形式

本稿において、２次形式の判別式は負であるものとする。このとき、$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$において、$D=b^2-4ac<0$であることから、$ac>0$となり、aとcが同符号であることが導かれる。ここで、

$$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2=a\left(x+\frac{b}{2a}y\right)^2+\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)y^2$$

と変形できる。$D<0$であるから、$f(x,y)$は$(x,y)\neq(0,0)$なる値に対して、$a>0$のときは$f(x,y)>0$、$a<0$のときは$f(x,y)<0$となる。以下、$a>0$のときfを正の２次形式、$a<0$のときfを負の２次形式と呼ぶことにする。対等な２次形式は同じ値域を有するので、正の２次形式に対等な２次形式は正の２次形式であり、負の２次形式に対等な２次形式は負の２次形式である。また、fとf'が対等ならば$-f$と$-f'$は対等である。以上から、判別式が負の２次形式の対等関係を考察するには正の２次形式の対等関係を考察すれば十分である。また、判別式Dを有する正の２次形式の正の対等により類別したときの類数を$\tilde{h}{}^{+}(D)$と表すことにすると、$h^{+}(D)=2\tilde{h}{}^{+}(D)$が成立する。

2次形式 $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ が条件

$c>a\geq b>-a$ または $c=a\geq b\geq 0$ ・・・①

を満たすとき、負の判別式を有する簡約2次形式であるという。

定理1

判別式 D を有する簡約2次形式 $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ は $|b|\leq\sqrt{\dfrac{|D|}{3}}$ を満たす。

したがって、その個数は有限である。

proof

簡約2次形式の条件より、$|b|\leq|a|\leq|c|$ が成立する。したがって、$b^2\leq ac$ を得る。これと、$D=b^2-4ac<0$ より、

$$|D|=|b^2-4ac|=4ac-b^2\geq 4b^2-b^2=3b^2$$

を得る。よって、$|b|\leq\sqrt{\dfrac{|D|}{3}}$ が成立する。したがって、b のとり得る整数値は有限個で、それぞれの値に対して $4ac=b^2-D$ で定まる a、c も有限個である。以上のことから、与えられた判別式 D を有する簡約2次形式は有限個である。

q.e.d.

定理2

原始的な簡約2次形式 $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ を不変にする正の特殊1次変換は次の通りである。

（i） $f(x,y)=x^2+y^2$ のとき、$\pm\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$、$\pm\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$

（ii） $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ のとき、$\pm\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$、$\pm\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}$、$\pm\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$

（iii）その他の $f(x,y)$ のとき、$\pm\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

proof

正の特殊1次変換 $X=\begin{pmatrix}r&s\\t&u\end{pmatrix}$ が $f(x,y)$ を不変にすれば、

$$\begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$

が成立する。これより、

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u & -t \\ -s & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$

が得られる。成分を比較して、

$$\begin{cases} a(r-u)+bt=0 \\ as+ct=0 \\ c(r-u)-bs=0 \end{cases} \quad ・・・②$$

を得る。

$s=0$ または $t=0$ とすると、$as+ct=0$ かつ $a,c>0$ より $s=t=0$ となる。したがって、$ru-st=ru=1$ より、$X=\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。以下、$s\neq 0$ かつ $t\neq 0$ とする。このとき、$as+ct=0$ かつ $a,c>0$ より $st<0$ である。

（ｉ）$r=u$ の場合

$-st\geq 1$ かつ $ru-st=r^2-st=1$ より、$r=u=0$ かつ $st=-1$ となる。

ゆえに、$X=\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ である。このとき、②より、$b=0$ かつ $a=c$ となる。

a、b、c は互いに素であるから、$a=c=1$、$b=0$ となる。

したがって、$f(x,y)=x^2+y^2$ である。

（ⅱ）$r\neq u$ の場合

$b=0$ ならば、$a(r-u)+bt=0$ より、$r=u$ となり矛盾する。

よって、$b\neq 0$ である。$r=0$ とすれば、$bt=au$、$bs=-cu$、$-st=1$ となる。

a、b、c は互いに素であることと、簡約 2 次形式であることから、$a=c=b=1$、$u=\pm 1$ となる。

ゆえに、$X=\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ であり、$f(x,y)=x^2+xy+y^2$ である。

$u=0$ としても同様にして、$X=\pm\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ であり、$f(x,y)=x^2+xy+y^2$ で

ある。

（iii）$r \neq 0$ かつ $u \neq 0$ の場合

$st < 0$ かつ $ru - st = 1$ より、$ru < 0$ である。

したがって、$b \neq 0$ であることに注意して、

$$|t| = \frac{a}{|b|}(|r| + |u|) \geq |r| + |u|、|s| = \frac{c}{|b|}(|r| + |u|) \geq |r| + |u|$$

となる。これより、

$$|st| \geq |r|^2 + 2|r||u| + |u|^2 > |ur| + 2$$

となるが、これは、$ru - st = 1$ より得られる $|ru| = |st| - 1$ に矛盾する。

ゆえに、r、s、t、u がすべて0でない場合は起こり得ない。

q.e.d.

このことから、次の系を得る。

系１

正の簡約２次形式に対応する２次式の第１根である２次代数的数 ξ を不変にする正の *modular* 変換は次のものに限定される。

（ｉ）$\xi = i$ のとき、$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$、$\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

（ii）$\xi = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき、$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$、$\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$、$\pm\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

（iii）その他の場合、$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

３　基本領域と類数の有限性

補題１

２次形式 f に対応する２次式の第１根を $\xi = X + Yi$ とする。このとき、f が簡約２次形式であるための条件は、

$$-\frac{1}{2} \leq X < \frac{1}{2}、|\xi| > 0 \text{ または } -\frac{1}{2} \leq X \leq 0、|\xi| = 1$$

が成立することである。

proof

$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ とおく。仮定より、対応する2次式の第2根は $\xi'=X-Yi$ であり、

$$2X=-\frac{b}{a}、|\xi|^2=X^2+Y^2=\frac{c}{a}$$

が成立する。f が簡約2次形式であることは、①より、

$$c>a\geq b>-a \text{ または } c=a\geq b\geq 0$$

が成立することであり、このことは、それぞれ、

$$-\frac{1}{2}\leq X<\frac{1}{2}、|\xi|>1 \text{ または } -\frac{1}{2}\leq X\leq 0、|\xi|=1$$

が成立することと同値である。

q.e.d

複素平面上の点 $\xi=X+Yi$ で $-\frac{1}{2}\leq X<\frac{1}{2}$、$|\xi|>1$ または、$-\frac{1}{2}\leq X<0$、$|\xi|=1$ を満たすもの全体のなす集合を基本領域という。基本領域内の点を第1根とする2次式に対応する正の2次形式は簡約2次形式であり、簡約2次形式に対応する2次式の第1根は基本領域内にある。

補題2

2次形式は、ある簡約2次形式に正に対等である。

proof

$$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & \frac{b}{2}\\ \frac{b}{2} & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

とする。$a>c$ のときは、

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & \frac{b}{2}\\ \frac{b}{2} & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & -\frac{b}{2}\\ -\frac{b}{2} & a\end{pmatrix} \quad \cdots ③$$

とできるので、$a\leq c$ と仮定してよい。$|b|>a$ のときは、$a\geq b+2na>-a$ となるように整数 n を選び、

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & \dfrac{b}{2}\\ \dfrac{b}{2} & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & \dfrac{b+2na}{2}\\ \dfrac{b+2na}{2} & c+nb+n^2a\end{pmatrix} \quad \cdots ④$$

のように正の特殊１次変換を行う。ここで、$a \leq c+nb+n^2a$ ならば、これが簡約２次形式を表す。$a > c+nb+n^2a$ ならば、再び③の変換を行うと次の行列が得られる。

$$\begin{pmatrix}a' & \dfrac{b'}{2}\\ \dfrac{b'}{2} & c'\end{pmatrix}、a'=c+nb+n^2a < c'=a、b'=-(b+2na)$$

これが簡約２次形式を表さないときは、更に④を行う。

$$\begin{pmatrix}a'' & \dfrac{b''}{2}\\ \dfrac{b''}{2} & c''\end{pmatrix}、a''=a'、a'' \geq b'' > -a''$$

このような正の特殊１次変換を繰り返し行って得られる行列が簡約２次形式を表さないとすれば、上の操作が無限に続くことになり、行列の(1,1)成分は減少を続ける。これは a が自然数であることに矛盾する。

q.e.d

補題３

$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ が簡約２次形式のとき、$0 < f(x,y) \leq a$ を満たす整数 (x,y) は次のものに限る。

（ｉ）$c > a$ のとき、$(x,y)=(\pm 1,0)$

（ii）$c=a>b$ のとき、$(x,y)=(\pm 1,0)$、$(0,\pm 1)$

（iii）$c=a=b$ のとき、$(x,y)=(\pm 1,0)$、$(0,\pm 1)$、$(\pm 1,\mp 1)$

特に、$f(x,y)$ の０と異なる最小値は a である。

proof

$0 < f(x,y) \leq a$ より、

$$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2=a\left(x+\frac{b}{2a}y\right)^2+\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)y^2 \leq a$$

となる。ここで、$4ac \geq 4a^2$、$b^2 \leq a^2$ であることから、

$$y^2 \leq \left(\frac{4a}{4ac-b^2}\right)a \leq \frac{4a^2}{3a^2}=\frac{4}{3}$$

を得る。したがって、$y=0,\pm1$である。

$y=0$のときは明らかに$x=\pm1$である。すなわち、条件$0<f(x,y)\le a$を満たすのは、$(x,y)=(\pm1,0)$のみである。

$y=\pm1$のときは、$f(x,\pm1)=ax^2\pm bx+c$となる。$a\ge|b|$より、$ax^2\pm bx\ge0$であるから、$f(x,\pm1)\ge c$となる。したがって、$c>a$のときは、$f(x,\pm1)>a$となるので、$(x,y)=(\pm1,0)$のみが条件を満たす。$c=a$のときは、$ax^2\pm bx=0$のときに限り、$f(x,\pm1)=a$となる。$a>b$のときに、$ax^2\pm bx=0$となるのは、$x=0$のみで、このとき、$(x,y)=(0,\pm1)$も条件を満たす。$a=b$のときは、$x=\pm1$も$ax^2\pm bx=0$を満たす。したがって、$(x,y)=(\pm1,\mp1)$も条件を満たす。

q.e.d

以上をまとめて、次の補題が得られる。

補題４

２次形式に正に対等な簡約２次形式は唯一つである。

proof

$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$と$f'(x,y)=a'x^2+b'xy+c'y^2$を正に対等な簡約２次形式とする。補題３より、f、f'の０と異なる最小値はそれぞれa、a'である。対等な２次形式の値域は一致するので、$a=a'$である。仮定より、

$$\begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & \frac{b'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' \end{pmatrix}$$

を満たす正の特殊１次変換$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$が存在する。(1,1) 成分を比較して、$f(r,t)=ar^2+brt+ct^2=a$が成立する。

$c>a$のとき、補題３より$r=\pm1$、$t=0$である。したがって、$b'=\pm2sa+b$である。一方、$a\ge b$、$b'>-a$より$b=b'$を得る。よって、$c=c'$となり、$f=f'$が成立する。

$c=a\ge b$とする。$c'>a'=a$ならば、上と同様にして、$f=f'$が得られるので、$c'=a'=a$である。したがって、$b^2=D+4ac=(b')^2$となる。$c=a$より$b,b'\ge0$であるから、$b=b'$となる。ゆえに、$f=f'$である。

q.e.d

補題２、補題４から次の定理が得られる。

定理３
任意の正の２次形式に正に対等な簡約２次形式が唯一つ存在する。

定理１、定理３から次の定理が得られる。

定理４
正の２次形式の類数 $\tilde{h}^{+}(D)$ は有限でその個数は判別式 D を有する簡約２次形式の個数に一致する。

定理４より、判別式が $D<0$ である２次形式の類数 $h^{+}(D)$ が有限であることがわかる。正の２次形式に対応する２次式の第１根 ξ は虚部が正の複素数であり、補題２より簡約２次形式に対応する２次式の第１根は基本領域に存在する。よって、定理３から虚部が正の複素数は基本領域内の唯一つの複素数に正に対等である。

定理５
虚部が正の複素数は基本領域に含まれる唯一つの複素数と正に対等である。

4　類数の計算例

（１）$D=-20$ の場合

$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ とする。定理１より、

$$|b| \leq \left[\sqrt{\frac{20}{3}}\right]=2$$

となるから、b は $b=0,\pm1,\pm2$ のいずれかである。また、$4ac=b^2-D$ であることから、$4ac=20$、21、24 である。したがって、$ac=5$、6 である。よって、①を満たす (a,b,c) は、

$(a,b,c)=(1,0,5)$、$(2,2,3)$

のみである。したがって、$D=-20$ の簡約２次形式は、

$$f_1(x,y)=x^2+5y^2\text{、}\ f_2(x,y)=2x^2+2xy+3y^2$$

となる。したがって、$\tilde{h}^{+}(-20)=2$ である。

（２） $D=-36$ の場合

$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ とする。定理１より、

$$|b|\le\left[\sqrt{\frac{36}{3}}\right]=3$$

となるから、b は $b=0,\pm1,\pm2,\pm3$ のいずれかである。また、$4ac=b^2-D$ であることから、$4ac=36$、37、40、45 である。したがって、$ac=9$、10 である。よって、①を満たす (a,b,c) は、

$(a,b,c)=(1,0,9)$、$(3,0,3)$、$(2,2,5)$

のみである。したがって、$D=-36$ の簡約２次形式は、

$$f_1(x,y)=x^2+9y^2\text{、}\ f_2(x,y)=3x^2+3y^2\text{、}$$

$$f_3(x,y)=2x^2+2xy+5y^2$$

となる。したがって、$\tilde{h}^{+}(-36)=3$ である。

（３） $D=-47$ の場合

$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ とする。定理１より、

$$|b|\le\left[\sqrt{\frac{47}{3}}\right]=3$$

となるから、b は $b=0,\pm1,\pm2,\pm3$ のいずれかである。また、$4ac=b^2-D$ であることから、$4ac=47$、48、51、56 である。したがって、$ac=12$、14 である。よって、①を満たす (a,b,c) は、

$(a,b,c)=(1,1,12)$、$(2,1,6)$、$(2,-1,6)$、$(3,1,4)$、$(3,-1,4)$

のみである。したがって、$D=-47$ の簡約２次形式は、

$$f_1(x,y)=x^2+xy+12y^2\text{、}\ f_2(x,y)=2x^2+xy+6y^2\text{、}$$

$$f_3(x,y)=2x^2-xy+6y^2\text{、}\ f_4(x,y)=3x^2+xy+4y^2\text{、}$$

$$f_5(x,y)=3x^2-xy+4y^2$$

となる。したがって、$\tilde{h}^{+}(-47)=5$ である。

補遺には、いくつかの $D<0$ に対して判別式Dを有する簡約２次形式を決定したものを載せた。簡約２次形式の個数が $\tilde{h}^{+}(D)$ である。

5　結　　言

本稿では、負の判別式を有する簡約２次形式が有限個であることを示し、更に、正の２次形式が簡約２次形式であることと対応する２次形式の第１根が基本領域にあることとが同値であることも示した。また、任意の与えられた正の２次形式に対してそれと正に対等な簡約２次形式が唯一つ存在することを示し、類数が有限であることを導いた。これより、虚部が正の２次代数的数に正に対等な点が基本領域内に唯一つ存在することがわかった。これらの考察をもとに、いくつかの負の判別式の値に対して簡約２次形式を求める計算を行った。

正の判別式を有する簡約２次形式については、判別式が負の場合とは様相は異なり、連分数が重要な役割を演じる。また、２次形式に対等な簡約２次形式も一意に定まるとは限らない。今後、これらのことを踏まえて、正の判別式を有する簡約２次形式の性質について考察する予定である。

参 考 文 献

１）高木貞治「初等整数論講義」共立出版.

２）河田敬義「数論」岩波書店.

３）ディリクレ・デデキント「整数論講義」（酒井孝一　訳）共立出版.

４）Ｃ．Ｆ．ガウス「ガウス整数論」（高瀬正仁　訳）朝倉書店.

５）W.J.Leveque「*Topics in number theory*」Dover.

６）D.B.Zagier「*Zetafunktionen und quadratische korper*」Springer-Verlag.

７）髙倉　亘「$\sqrt{n}$ の連分数展開に関する考察」数学のいずみＨＰ.

８）髙倉　亘「２次形式と２次代数的数に関する考察」数学のいずみＨＰ.

＜ 補 遺 ＞ 負の判別式を有する簡約２次形式の例

D	簡 約 2 次 形 式	$\tilde{h}^{+}(D)$
−3	$f(x,y)=x^2+xy+y^2$	1
−4	$f(x,y)=x^2+y^2$	1
−7	$f(x,y)=x^2+xy+2y^2$	1
−8	$f(x,y)=x^2+2y^2$	1
−11	$f(x,y)=x^2+xy+3y^2$	1
−12	$f_1(x,y)=x^2+3y^2$、 $f_2(x,y)=2x^2+2xy+2y^2$	2
−15	$f_1(x,y)=x^2+xy+4y^2$、 $f_2(x,y)=2x^2+xy+2y^2$	2
−16	$f_1(x,y)=x^2+4y^2$、 $f_2(x,y)=2x^2+2y^2$	2
−19	$f(x,y)=x^2+xy+5y^2$	1
−20	$f_1(x,y)=x^2+5y^2$、 $f_2(x,y)=2x^2+2xy+3y^2$	2
−23	$f_1(x,y)=x^2+xy+6y^2$、 $f_2(x,y)=2x^2+xy+3y^2$ $f_3(x,y)=2x^2-xy+3y^2$	3
−24	$f_1(x,y)=x^2+6y^2$、 $f_2(x,y)=2x^2+3y^2$	2
−27	$f_1(x,y)=x^2+xy+7y^2$、 $f_2(x,y)=3x^2+3xy+3y^2$	2
−28	$f_1(x,y)=x^2+7y^2$、 $f_2(x,y)=2x^2+2xy+4y^2$	2
−31	$f_1(x,y)=2x^2+xy+4y^2$、 $f_2(x,y)=2x^2-xy+4y^2$ $f_3(x,y)=x^2+xy+8y^2$	3
−32	$f_1(x,y)=x^2+8y^2$、 $f_2(x,y)=3x^2+2xy+3y^2$ $f_3(x,y)=2x^2+4y^2$	3
−35	$f_1(x,y)=x^2+xy+9y^2$、 $f_2(x,y)=3x^2+xy+3y^2$	2
−36	$f_1(x,y)=x^2+9y^2$、 $f_2(x,y)=3x^2+3y^2$ $f_3(x,y)=2x^2+2xy+5y^2$	3
−39	$f_1(x,y)=x^2+xy+10y^2$、 $f_2(x,y)=2x^2+xy+5y^2$ $f_3(x,y)=2x^2-xy+5y^2$、 $f_4(x,y)=3x^2+3xy+4y^2$	4
−40	$f_1(x,y)=x^2+10y^2$、 $f_2(x,y)=2x^2+5y^2$	2
−43	$f(x,y)=x^2+xy+11y^2$	1
−44	$f_1(x,y)=x^2+11y^2$、 $f_2(x,y)=2x^2+2xy+6y^2$ $f_3(x,y)=3x^2+2xy+4y^2$、 $f_4(x,y)=3x^2-2xy+4y^2$	4
−47	$f_1(x,y)=x^2+xy+12y^2$、 $f_2(x,y)=2x^2+xy+6y^2$ $f_3(x,y)=2x^2-xy+6y^2$、 $f_4(x,y)=3x^2+xy+4y^2$ $f_5(x,y)=3x^2-xy+4y^2$	5