三角形の外接円と内接円との関係に関する考察

北海道千歳北陽高等学校　教諭　髙　倉　　亘

（*Keywords*：三角形、外接円、内接円、三等円定理、反転）

1　緒　　言

２００６年度 京都大学 理系 後期試験 数学 大問４は、三角形の外接円と内接円との関係を問うものであった。この問題に関して出版物などで公表されている解答例の多くは三角関数の凸性を利用した証明を行っている。[1)] 本稿では、この問題について、反転を用いた観点から考察する。本稿で考察する問題は以下に示すものである。

平面上の点Oを中心とし半径１の円周上に相異なる３点A、B、Cがある。$\triangle ABC$の内接円の半径rは$\dfrac{1}{2}$以下であることを示せ。

（２００６年　京都大学 理系 後期）

2　設問の背景

（1）三等円定理

定理（三等円定理）

３円e, f, gはPで交わる等円（半径r）とする。また、eとf、fとg、gとeの交点をそれぞれA, B, Cとする。A, B, Cを通る円hはこれらの３円と等円である。

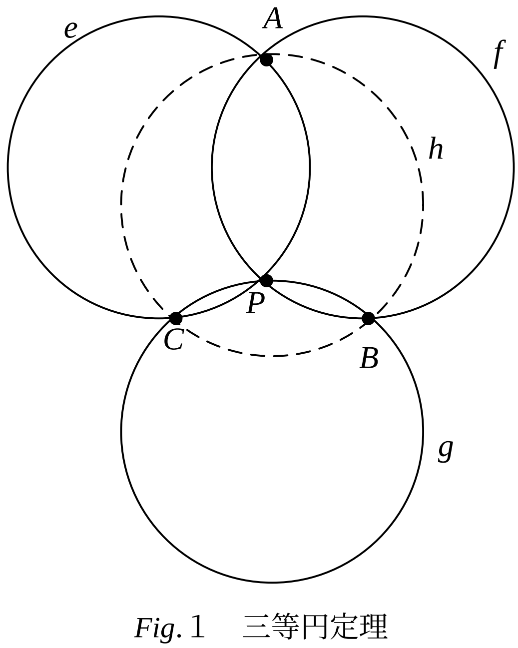


*Fig.*１　三等円定理

proof

円 g と AP との交点を D とする。（*Fig*.2 に概念図を示す。）

f 、 g が等円であるから、 $\angle BAP = \angle BDP$ ・・・①

g 、 e が等円であるから、 $\angle CAP = \angle CDP$ ・・・②

①、②の辺々を加えると、 $\angle BAP + \angle CAP = \angle BDP + \angle CDP$

すなわち、 $\angle BAC = \angle BDC$

となり、 g と h とが等円になる。

ゆえに、 e 、 f 、 g 、 h は等円である。

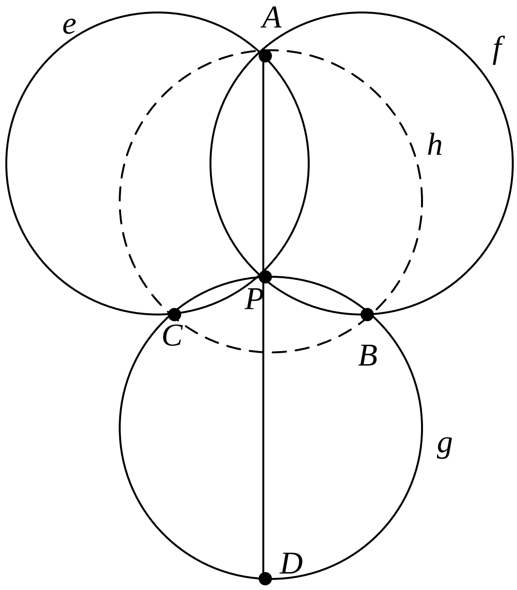


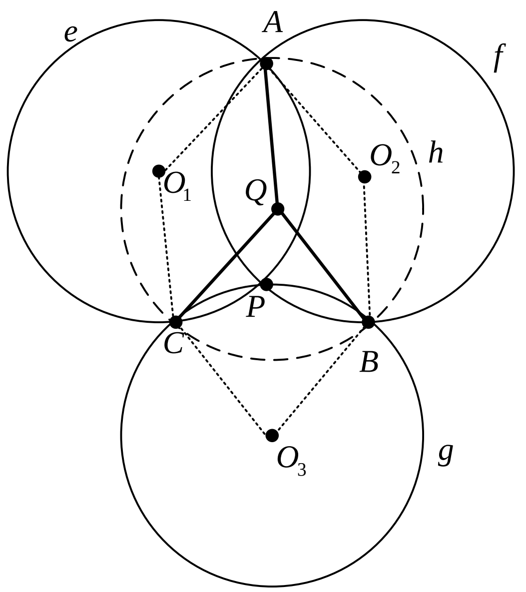
Fig.2　三等円定理の証明の概念図

q.e.d.

また、定理１より、$\triangle ABC$ の外心（円 h の中心）に関して、次の系１が得られる。

系１

$Fig.3$ において、半径 r の３円 e, f, g が１点 P で交わるとき、他の３交点 A, B, C を頂点とする三角形の外接円 h の半径も r である。また、３円 e, f, g の中心をそれぞれ O_1, O_2, O_3 とするとき、四角形 CO_1AQ が平行四辺形となるように点 Q をとると、四角形 AO_2BQ、四角形 BO_3CQ も平行四辺形となり、点 Q が $\triangle ABC$ の外心（円 h の中心）でその半径も r である。

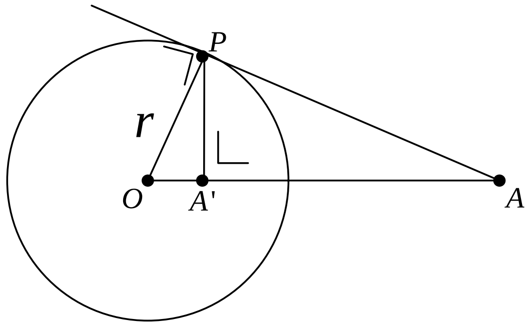


$Fig.3$　系１の概念図

（２）三角形の内接円に対する外接円の反転

反転とは、定点 O と半径 r の円が与えられ、直線 OA 上に１点 A' を、$OA \cdot OA' = r^2$ を満たすようにとるとき、A に A' を対応させる同相写像のことをいう。この反転の定義より、A の反転が A' ならば A' の反転は A であり、その作図法は $Fig.4$ のようにして得られる。

$Fig.4$ において、$OP = r$、$OA = R$ とすれば、$OA' = \dfrac{r^2}{R}$ となる。



$Fig.4$　反転

定理１および反転の定義より、次の系２が得られる。

系２（三角形の内接円に対する外接円の反転）

$\triangle ABC$ の内接円を C_0、外接円を C_1 とする。内接円 C_0 に関する反転 φ により、３点 A,B,C はそれぞれ A',B',C' に移り、これらは C_0 の内部に存在する。また、反転 φ により、C_1 は３点 A',B',C' を通る円 C_1' に移る。*Fig*.5 において、$\triangle ABC$ の内心を I とすれば、定理１と反転の定義より、C_0 の半径を r、C_1' の半径を r' とすれば、$r'=\dfrac{1}{2}r$ が成立する。

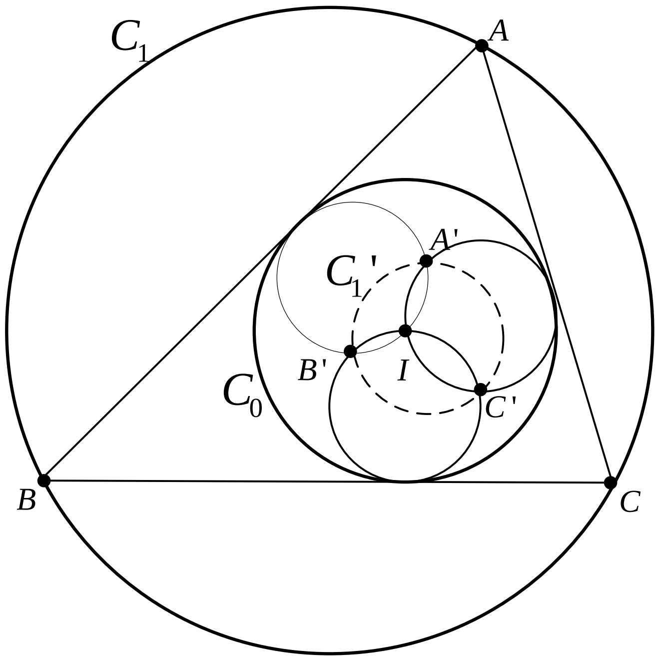


Fig.5　三角形の内接円に対する外接円の反転

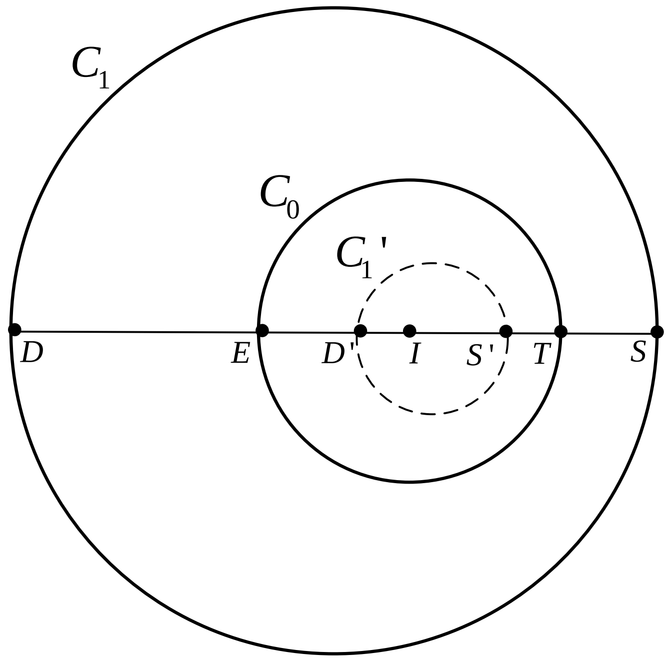
系２が主張することを言い換えると、

C_1 を外接円、C_0 を内接円とする三角形が存在する。$\Leftrightarrow$ $r'=\dfrac{1}{2}r$

ということである。

3　京都大学の入試問題に関する考察

本章では、緒言で示した問題について考察する。$\triangle ABC$ の内接円を C_0、内心を I、外接円を C_1、C_0 に関する C_1 の反転円を $C_1{}'$ とする。



$Fig.6$　C_0、C_1、$C_1{}'$ の関係

$Fig.6$ において、内接円の半径が r であることから、$IE = r$。
また、$ID = x$ とおけば、外接円の直径が 2 であることから、$IS = 2 - x$。
D, S の反転がそれぞれ D', S' であることから、$ID' = \dfrac{r^2}{x}$、$IS' = \dfrac{r^2}{2-x}$ である。

系 2 より、

$$\frac{r^2}{x} + \frac{r^2}{2-x} = r$$

すなわち、

$$r = \frac{x(2-x)}{2} \leq \frac{1}{2}$$ （ただし、$0 < x < 2$）

r は $x = 1$ のとき、最大値 $\dfrac{1}{2}$ となり、このとき、$\triangle ABC$ の内心と外心は一致し、正三角形となる。

このように、この設問の背景には、反転が関与していると考えるのが自然かもしれない。また、反転を思い描きながら、多くの出版物で引用している三角関数の凸性を利用した証明を見直すと、これも自然な解法に見えてくる。

４　結　　言

本稿では、大学入試問題（２００６年度 京都大学 理系 後期試験 数学 大問４）で取り上げられた三角形の外接円と内接円との関係を反転に着眼した観点から考察した。この問題に関しては、多くの出版物などで三角関数の凸性を利用した証明を行っているが、本稿で示した反転円のイメージを持つことでこれらの解法に関してもより深い理解が得られるものと思われる。また、この問題に限らず、さまざまな観点から大学入試問題を考察することで、その問題の出題意図や背景など本質的な部分が明らかとなる。このことは、新たな教材開発に資するものと思われる。本稿をもとに、新たな問題提起がなされることを期待したい。

謝　　辞

本稿を作成するにあたって、札幌市在住 数学愛好家 新城浩一 氏からは貴重な助言をいただきました。この場を借りてお礼申し上げます。

参 考 文 献

１)「大学への数学」２００６年５月号 東京出版.