楕円に関する極と極線に着眼したある入試問題の解法

北海道千歳北陽高等学校　教諭　高　倉　　亘

（*Keywords*：２次曲線、楕円、極、極線、*Lagrange* の未定乗数法）

１　緒　　言

本稿では、平成１７年１０月２１日、第６０回北海道算数数学教育研究大会高等学校部会　第６分科会（大学入試）において提示された資料[1)]から、岩見沢東高等学校 松本睦郎 先生が検討された札幌医科大学の大問３について、楕円に関する極と極線の性質に着眼した観点から別解を示すことにする。本稿で考察する問題は以下に示すものである。

> a を正の実数とし、楕円　$C:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$　を考える。
>
> （１）x 座標、y 座標が共に正である C 上の点を P とする。点 P における C の接線 ℓ と、x 軸、y 軸との交点をそれぞれ A、B とする。線分 AB の長さが最小となる点 P の座標、およびそのときの接線 ℓ を求めよ。
>
> （２）（１）で求めた接線 ℓ に関して C を対称移動して得られる図形を C' とする。C' が x 軸と共有点を持つような a の範囲を求めよ。
>
> （２００５年　札幌医科大学）

２　楕円に関する極と極線の性質の導出[2)]

（１）２次曲線に関する極と極線

点 $P_1(x_0,y_0)$ と２次曲線 $C:ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ が与えられているとき、点 $P_1(x_0,y_0)$ を通り、方向余弦が λ、μ である直線のパラメーター方程式は、

$$x=x_0+\lambda t、\ y=y_0+\mu t$$

である。

ここで、*Fig.*1 に示すように、この直線と２次曲線との交点を Q、R とし、この直線上に４点 $P_1,P;Q,R$ が調和点列をなすように、すなわち、

$$\frac{2}{P_1P}=\frac{1}{P_1Q}+\frac{1}{P_1R}$$

となるように点 P を配置したときの点 P の軌跡を求めることを考える。

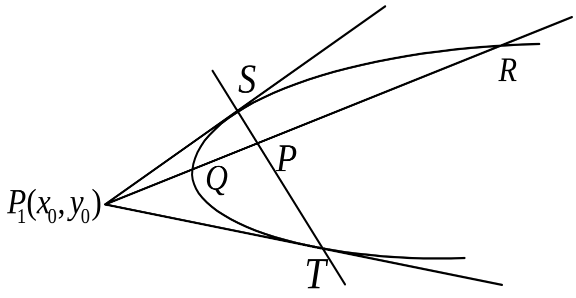


Fig.1　２次曲線に関する極と極線

直線の方程式を２次曲線の方程式へ代入して、

$$a(x_0+\lambda t)^2+2h(x_0+\lambda t)(y_0+\mu t)+b(y_0+\mu t)^2$$

$$+2g(x_0+\lambda t)+2f(y_0+\mu t)+c=0$$

すなわち、

$$(a\lambda^2+2h\lambda\mu+b\mu^2)t^2+2\left\{(ax_0+hy_0+g)\lambda+(hx_0+by_0+f)\mu\right\}t$$

$$+a{x_0}^2+2hx_0y_0+b{y_0}^2+2gx_0+2fy_0+c=0$$

この方程式の２解が P_1Q 、 P_1R であるから、解と係数の関係によって、

$$P_1Q+P_1R=-\frac{2\left\{(ax_0+hy_0+g)\lambda+(hx_0+by_0+f)\mu\right\}}{a\lambda^2+2h\lambda\mu+b\mu^2}$$

$$P_1Q\cdot P_1R=\frac{a{x_0}^2+2hx_0y_0+b{y_0}^2+2gx_0+2fy_0+c}{a\lambda^2+2h\lambda\mu+b\mu^2}$$

ところが、

$$\frac{2}{P_1P}=\frac{1}{P_1Q}+\frac{1}{P_1R}=\frac{P_1Q+P_1R}{P_1Q\cdot P_1R}$$

であるから、

$$\frac{2}{t}=-\frac{2\left\{(ax_0+hy_0+g)\lambda+(hx_0+by_0+f)\mu\right\}}{a{x_0}^2+2hx_0y_0+b{y_0}^2+2gx_0+2fy_0+c}$$

よって、

$$(ax_0+hy_0+g)\lambda t+(hx_0+by_0+f)\mu t$$

$$+a{x_0}^2+2hx_0y_0+b{y_0}^2+2gx_0+2fy_0+c=0$$

これに、

$\lambda t=x-x_0$、 $\mu t=y-y_0$

を代入して、

$$ax_0x+h(x_0y+xy_0)+by_0y+g(x+x_0)+f(y+y_0)+c=0 \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

①は、x、y に関する１次方程式であるから、求める軌跡は直線である。

この直線を点 P_1 の２次曲線 C に関する極線といい、点 P_1 をこの極線の極という。

点 P_1 から C 上への２つの接線 P_1S 、P_1T を引き得る場合には、P_1 の極線は接点 S と T を結ぶ直線である。

点 P_1 が C 上にあれば、①は点 P_1 における接線となるので、C 上の１点 P_1 におけるその極線は P_1 での接線である。

点 P_1 から C 上へ接線を引けない場合には、P_1 を通る直線と C との２つの交点における２本の接線の交点の軌跡が P_1 の極線である。

（２）楕円に関する極と極線

①より、１点 $P_1(x_0,y_0)$ の楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

に関する極線の方程式は、

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$$

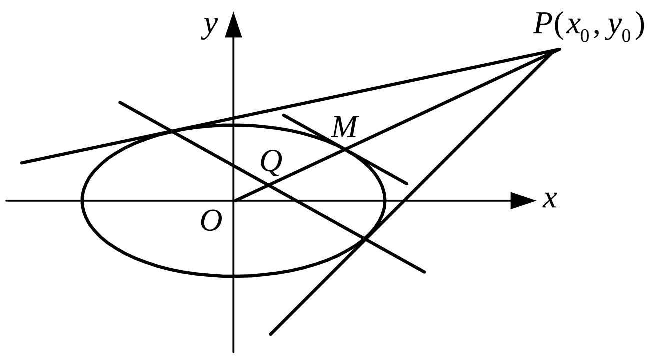
である。

定理（楕円に関する極と極線の性質）

１点 P と１つの楕円 C の中心 O とを結ぶ直線が、C と交わる１つの点を M 、P の極線と交わる点を Q とすれば、

$$OP\cdot OQ=OM^2$$

が成立する。



$Fig.2$　楕円に関する極と極線

proof

Fig.2 に示す楕円の方程式を

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

点 P の座標を (x_0, y_0) とすれば、OP のパラメーター方程式は、

$$x=x_0 t \text{、} \quad y=y_0 t$$

である。また、 P の極線の方程式は、

$$\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}=1$$

である。ここで、直線 OP のパラメーター方程式を楕円の方程式へ代入して、

$$\frac{{x_0}^2 t^2}{a^2}+\frac{{y_0}^2 t^2}{b^2}=1$$

よって、

$$t=\pm\frac{ab}{\sqrt{b^2 {x_0}^2+a^2 {y_0}^2}}$$

これより、 M の座標は、

$$M\left(\frac{abx_0}{\sqrt{b^2 {x_0}^2+a^2 {y_0}^2}}, \frac{aby_0}{\sqrt{b^2 {x_0}^2+a^2 {y_0}^2}}\right)$$

である。また、直線 OP のパラメーター方程式を P の極線の方程式へ代入して、

$$\frac{{x_0}^2 t}{a^2}+\frac{{y_0}^2 t}{b^2}=1$$

よって、

$$t=\frac{a^2 b^2}{b^2 {x_0}^2+a^2 {y_0}^2}$$

これより、 Q の座標は、

$$Q\left(\frac{a^2 b^2 x_0}{b^2 {x_0}^2+a^2 {y_0}^2}, \frac{a^2 b^2 y_0}{b^2 {x_0}^2+a^2 {y_0}^2}\right)$$

である。したがって、

$$OP\cdot OQ=\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{a^2 b^2 x_0}{b^2 {x_0}^2+a^2 {y_0}^2}\right)^2+\left(\frac{a^2 b^2 y_0}{b^2 {x_0}^2+a^2 {y_0}^2}\right)^2}$$

$$=\frac{a^2 b^2}{b^2 {x_0}^2+a^2 {y_0}^2}({x_0}^2+{y_0}^2)$$

および、

$$OM^2=\left(\frac{abx_0}{\sqrt{b^2x_0{}^2+a^2y_0{}^2}}\right)^2+\left(\frac{aby_0}{\sqrt{b^2x_0{}^2+a^2y_0{}^2}}\right)^2$$
$$=\frac{a^2b^2}{b^2x_0{}^2+a^2y_0{}^2}(x_0{}^2+y_0{}^2)$$

となる。

よって、$OP\cdot OQ=OM^2$

q.e.d.

3　札幌医科大学の入試問題に関する考察

本章では、緒言で示した問題について考察する。

＜小問（１）について＞

Fig.3 において、C 上の ℓ との接点を $P(x_0,h)$ とおき、ℓ の x 軸、y 軸との交点を $A(\alpha,0)$、$B(0,\beta)$ とする。

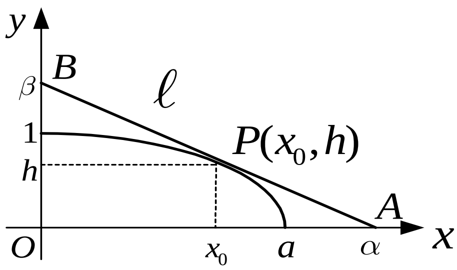


Fig.3　小問（１）の概念図

ここで、P を通り y 軸に平行な直線は点 A の極線であり、P を通り x 軸に平行な直線は点 B の極線であるので、上記の定理より、

$$x_0\alpha=a^2、h\beta=1^2$$

が成立する。したがって、

$$\alpha=\frac{a^2}{x_0}、\beta=\frac{1}{h}$$

となる。また、ℓ は P の接線（極線）であるので、その方程式は、

$$\frac{x_0x}{a^2}+hy=1\ ・・・②$$

であり、P は ℓ 上に存在するので、

$$\frac{{x_0}^2}{a^2}+h^2=1$$ より、${x_0}^2=a^2(1-h^2)$

ここで、$AB^2=f(h)$ とおけば、

$$f(h)=\alpha^2+\beta^2=\frac{a^4}{{x_0}^2}+\frac{1}{h^2}=\frac{a^2}{1-h^2}+\frac{1}{h^2}$$

これより、

$$\frac{df(h)}{dh}=\frac{2(a+1)\left\{(a+1)h^2-1\right\}}{h^3(1-h^2)^2}$$

$0<h<1$ であるから、$h=\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}$ で $f(h)$ は最小となる。これより、

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{a+1}}\right)=(a+1)^2$$

となることから、AB の最小値は $a+1$ となる。このとき、

$$x_0=a\sqrt{1-h^2}=\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}}$$

したがって、求める接点 P の座標は、

$$P\left(\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}},\frac{1}{\sqrt{a+1}}\right)$$

となる。この座標の値を②に代入することにより、求める接線 ℓ の方程式は、

$$\frac{1}{\sqrt{a(a+1)}}x+\frac{1}{\sqrt{a+1}}y=1$$

となる。

この小問に関して、松本先生の解法[1]では、接点 P を $(a\cos\theta,\sin\theta)$ とおき、*Schwarz* の不等式によって、AB の最小値を評価している。また、ℓ を $y=mx+n(m>0,n>0)$ とすれば、相加・相乗平均の関係式を用いて AB の最小値を評価することもできる（補遺１参照)。本稿では、楕円に関する極と極線との関係に着眼し、接点 P の y 座標を変数に選ぶことで、簡単な導関数の計算によって結論を導くことができた。

次に、この小問に関して、変分原理で一般に用いられる *Lagrange* の未定乗数法[3]による別解を示す。

＜小問（１）の別解（*Lagrange* の未定乗数法）＞

$P(x,y)$ とすると、

$$AB^2 = f(x,y) = \frac{a^4}{x^2} + \frac{1}{y^2}$$

また、束縛条件は、

$$g(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + y^2 - 1 = 0、\ x > 0、\ y > 0$$

であるから、*Lagrange* の未定乗数を λ とすれば、

$$\tilde{f}(x,y) = \frac{a^4}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + y^2 - 1\right)$$

の最小条件を求めればよい。このことから、

$$\frac{\partial \tilde{f}(x,y)}{\partial x} = -\frac{2a^4}{x^3} + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \text{ より、 } x^2 = \frac{a^3}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\frac{\partial \tilde{f}(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{y^3} + 2\lambda y = 0 \text{ より、 } y^2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

これらを束縛条件に代入すると、

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{a^3}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 1 = 0$$

これより、

$$\sqrt{\lambda} = a + 1$$

となるので、 $f(x,y)$ を最小にする x、 y の値は、

$$x = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}}、\ y = \frac{1}{\sqrt{a+1}}$$

となる。したがって、求める接点 P の座標は、

$$P\left(\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}}, \frac{1}{\sqrt{a+1}}\right)$$

となる。この座標の値を②に代入することにより、求める接線 ℓ の方程式は、

$$\frac{1}{\sqrt{a(a+1)}} x + \frac{1}{\sqrt{a+1}} y = 1$$

となる。

<小問（２）について>（遺愛女子高等学校 西谷優一 先生のアイデアによる）
（１） の結果より、ℓ の傾きを k とすれば、

$$k = -\frac{1}{\sqrt{a}}$$

である。*Fig*.4 は C' が x 軸に接した状態を示したものである。

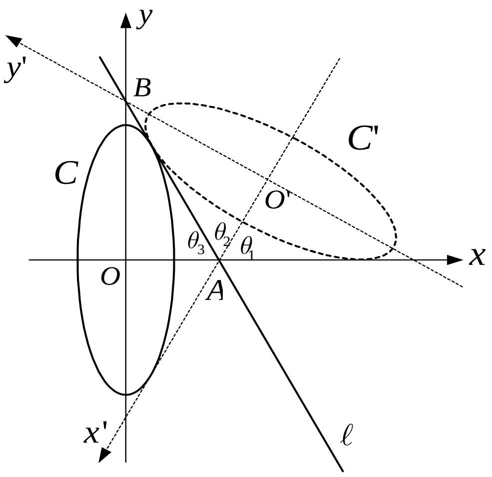


Fig.4　小問（２）の概念図

このとき、ℓ に関して、x および y 軸を対称移動したものを x' 軸および y' 軸とする。ここで、C' が x 軸に接するならば、C は x' 軸に接するので、x' 軸は ℓ と x 軸とのなす角を２等分する。したがって、

$$\theta_1 = \theta_2$$

また、x 軸と x' 軸は ℓ に関して対称であるから、

$$\theta_2 = \theta_3$$

これらより、$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \dfrac{\pi}{3}$

となるので、この場合、ℓ の傾き k_0 は、

$$k_0 = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

となる。C' が x 軸と共有点を持つことは、C が x' 軸と共有点を持つことと同値であり、その条件は、

$k \leq k_0$（ただし、$a > 0$）

であるから、求める a の範囲は、

$$0 < a \leq \frac{1}{3}$$

となる。

この小問に関して、松本先生の解法[1]では、aの臨界値$a=\frac{1}{3}$を求めるために、aに関する方程式を導き、それを解く計算主体型となっている。一方、西谷先生のアイデアでは、x軸、x'軸、ℓが交角$\frac{\pi}{3}$で交わることに着眼し、計算をほとんど用しない。また、この小問の背景にある性質に関しては補遺２、３を参照のこと。

４　結　　言

本稿では、楕円に関する極と極線の性質に着眼した観点から、大学入試問題（２００５年度の札幌医科大学 数学 大問５）について考察した。さまざまな観点から大学入試問題を考察することで、その問題の出題意図や背景など本質的な部分が明らかとなる。このことは、新たな教材開発に資するものと思われる。本稿をもとに、新たな問題提起がなされることを期待したい。

謝　　辞

本稿を作成する動機となった札幌医科大学の問題を考察された、岩見沢東高等学校　松本睦郎 先生、小問（２）のアイデアを示された遺愛女子高等学校 西谷優一先生に感謝いたします。また、札幌市在住 数学愛好家 新城浩一 氏からは貴重な助言をいただきました。この場を借りてお礼申し上げます。

参 考 文 献

１）松本睦郎「２００５年度 札幌医科大学入試問題」第６０回北海道算数数学教育研究大会高等学校部会　第６分科会　配布資料.

２）矢野健太郎「平面解析幾何学」裳華房.

３）小野寺嘉孝「物理のための応用数学」裳華房.

＜補 遺１＞　小問（１）について（相加・相乗平均で最小値を評価する）

楕円

$$C:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$$

の第１象限に接点をもつ接線ℓの方程式を

$$\ell:y=-mx+n(m>0,n>0)$$

とおく。ℓの方程式を楕円の方程式へ代入して、

$$\frac{x^2}{a^2}+(-mx+n)^2=1$$

これを整理して、

$$(a^2m^2+1)x^2-2a^2mnx+a^2(n^2-1)=0$$

この判別式をDとすれば、

$$\frac{D}{4}=a^4m^2n^2-(a^2m^2+1)a^2(n^2-1)=0$$

であればよいので、

$$n=\sqrt{a^2m^2+1}$$

したがって、ℓの方程式は、

$$y=-mx+\sqrt{a^2m^2+1}$$

となる。また、切片は、

$$A\left(\frac{\sqrt{a^2m^2+1}}{m},0\right)、B\left(0,\sqrt{a^2m^2+1}\right)$$

であるから、

$$\begin{aligned}AB^2&=\frac{a^2m^2+1}{m^2}+a^2m^2+1\\&=a^2m^2+\frac{1}{m^2}+a^2+1\\&\geq 2\sqrt{a^2m^2\cdot\frac{1}{m^2}}+a^2+1\\&=2a+a^2+1=(a+1)^2\end{aligned}$$

等号成立は、$a^2m^2=\dfrac{1}{m^2}$すなわち、$m=\sqrt{\dfrac{1}{a}}$のときである。

ゆえに、$m=\sqrt{\dfrac{1}{a}}$のとき、$AB_{\min}=a+1$となる。

＜補 遺２＞　小問（２）に関する性質ついて（No.1）

性質①

$f(x)$ は偶関数かつ、いたるところ $f''(x)>0$ であるとする。曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線 ℓ について、曲線 C を対称移動した図形を C' とする。C' が y 軸に接するとき、

$$3\{f'(a)\}^2=1$$

が成立する。（すなわち、ℓ と x 軸とのなす角は $\dfrac{\pi}{6}$ である。）

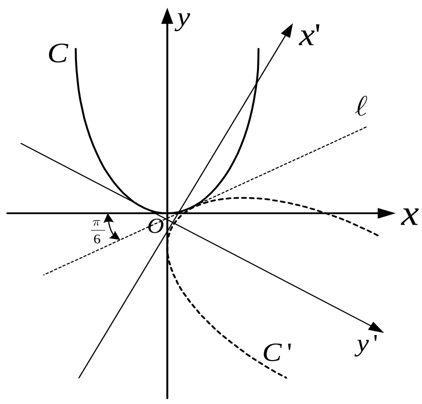


*Fig.*5　性質①の概念図

＜性質①の考察＞

ℓ について x 軸、y 軸を対称移動したものをそれぞれ、x' 軸、y' 軸とする。ここで、ℓ の傾きを $f'(a)=\tan\theta$ とすれば、x' 軸の傾き m_x は、

$$m_x=\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2f'(a)}{1-\{f'(a)\}^2}$$

となる。これより、y' 軸の傾き m_y は、

$$m_y=-\frac{1}{m_x}=-\frac{1-\{f'(a)\}^2}{2f'(a)}$$

となる。ここで、ℓ と y' 軸とは y 軸で交わり、共に、曲線 C における接線である。$f(x)$ が偶関数であることから、C は y 軸対称となるので、ℓ と y' 軸の傾きについて、

$$-\frac{1-\{f'(a)\}^2}{2f'(a)}=-f'(a)$$

が成立する。これを整理して、

$$3\{f'(a)\}^2=1$$

が導かれる。

＜補 遺３＞　小問（２）に関する性質について（No.2）

性質②

直線ℓについて対称な凸図形Cが直線mと１点のみを共有し、直線mについて図形Cと対称な図形C'が直線ℓと１点のみを共有するならば、２直線ℓ、mのなす角は$\dfrac{\pi}{3}$である。

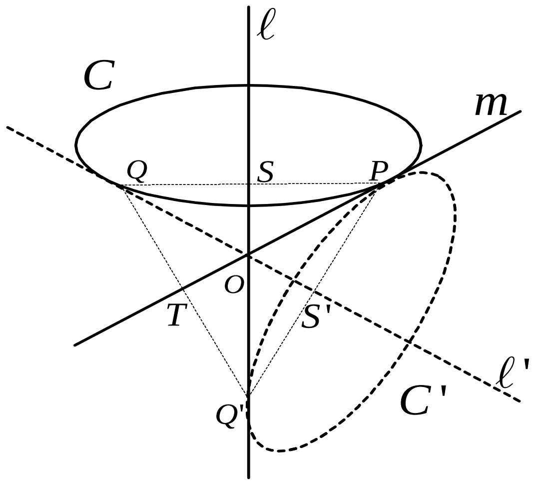


*Fig.*6　性質②の概念図

＜性質②の考察＞

ℓとmとの交点をOとし、Cのmとの共有点をPとする。また、Pのℓについての対称点をQ、PQの中点をSとする。Cをmについて対称移動したとき、ℓはℓ'に移り、Oを通過する直線となる。このとき、Sと対称な位置にある点をS'とすれば、

$$\angle SOP = \angle S'OP$$

が成立する。更に、C'がℓと接する場合には、ℓ'はQで接し、この点は、C'とℓとの接点Q'とmについて対称な位置に存在する。

また、PとQとがℓについて対称な位置にあることから、

$$\angle SOP = \angle SOQ$$

が成立する。

以上のことから、

$$\angle SOP = \angle S'OP = \angle SOQ = \frac{\pi}{3}$$

となり、主張は導かれる。

＜補 遺４＞　平成１７年度 札幌医科大学 数学 大問３ に関する松本先生の解答例

$\boxed{3}$ a を正の実数とし，楕円

$$C : \frac{x^2}{a^2}+y^2=1$$

を考える。

(1) x 座標，y 座標が共に正である C 上の点を P とする。点 P における C の接線 ℓ と，x 軸，y 軸との交点をそれぞれ A，B とする。線分 AB の長さが最小となる点 P の座標，およびそのときの接線 ℓ を求めよ。

(2) (1)で求めた接線 ℓ に関して C を対称移動して得られる図形を C' とする。C' が x 軸と共有点を持つような a の範囲を求めよ。

〔解答例〕

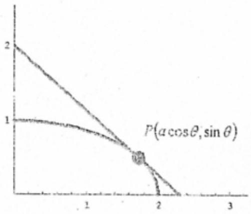
（1）楕円上の点 $P(x, y)$ とおく、

C：$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$ より、

$x=a\cos\theta, y=\sin\theta, \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

点 $P(a\cos\theta, \sin\theta)$ における接線の方程式は $\dfrac{a\cos\theta}{a^2}\times x+\sin\theta\times y=1$

$\dfrac{\cos\theta}{a}\times x+\sin\theta\times y=1$ …①



（ⅰ）$y=0$ のとき　　（ⅱ）$x=0$ のとき

$x=\dfrac{a}{\cos\theta}$　　$y=\dfrac{1}{\sin\theta}$

$A\left(\dfrac{a}{\cos\theta}, 0\right)$　　$B\left(0, \dfrac{1}{\sin\theta}\right)$

$AB^2=\dfrac{a^2}{\cos^2\theta}+\dfrac{1}{\sin^2\theta}$

AB^2 の最小値を求める。

Schwarz の不等式
$(p^2+q^2)(r^2+s^2)\geqq(pr+qs)^2$
等号成立は $ps=qr$ のとき成立

$AB^2=\dfrac{a^2}{\cos^2\theta}+\dfrac{1}{\sin^2\theta}=\left(\dfrac{a^2}{\cos^2\theta}+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\right)(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\geqq(a+1)^2$

等号成立は $\dfrac{a}{\cos\theta}\times\sin\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ のとき $\tan^2\theta=\dfrac{1}{a}$ つまり $\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ のとき AB は最小値 $a+1$ をとる。

（2）　曲線 C を 1 に関して対称移動すると複雑になる。

Point；接線 $\dfrac{\cos\theta}{a}\times x+\sin\theta\times y=1$ を a で表示する。

（1）で求めた $\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ を利用できる。

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}$ となる。$P\left(\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}}, \dfrac{1}{\sqrt{a+1}}\right)$

接線 l；$\dfrac{1}{\sqrt{a(a+1)}}x+\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}y=1$

$\boxed{\text{直線変換法}}$

図形Cを変換しないで、x 軸を 1 に関して対称移動した直線mとCとの共有点を持つ条件を求める。

接線 l；$y=-\dfrac{1}{\sqrt{a}}x+\sqrt{a+1}$

$y=0$ を、接線 l へ代入　$x=\sqrt{a(a+1)}$

接線 l の傾き $=\tan(\pi-\theta)=-\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ より倍角公式

$\tan 2\theta=\dfrac{2\sqrt{a}}{a-1}$

点 A を求める。

$A\left(\sqrt{a(a+1)}, 0\right)$ を通り

傾き $\tan(\pi-2\theta)=-\tan 2\theta=-\dfrac{2\sqrt{a}}{a-1}$ の直線を求めると

$y=-\dfrac{2\sqrt{a}}{a-1}x+\dfrac{2a\sqrt{a+1}}{a-1}$　　$(a\neq 1)$

直線m；$2\sqrt{a}x+(a-1)y-2a\sqrt{a+1}=0$

楕円 C；$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$

が交点を持つ a の条件を求める。

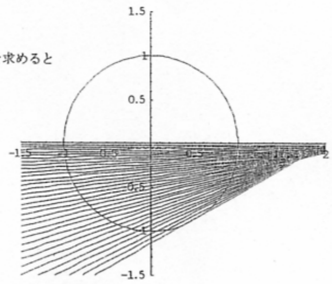
$\dfrac{x}{a}=X, y=Y$ とおくと

円 C'；$X^2+Y^2=1$

直線 m'；$2a\sqrt{a}X+(a-1)Y-2a\sqrt{a+1}=0$

点と直線の距離公式を利用して

円 C'の中心と直線m'との距離≦１　のとき共有点を持つ。



$\dfrac{\left|-2a\sqrt{a+1}\right|}{\sqrt{4a^3+(a-1)^2}}\leqq 1$

$2a\sqrt{a+1}\leqq\sqrt{4a^3+a^2-2a+1}$

両辺を２乗してまとめると

$3a^2+2a-1\leqq 0$

$(3a-1)(a+1)\leqq 0$

$-1\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$

a は正の実数だから

$0<a\leqq\dfrac{1}{3}$ …（答）