こんなものあったら良いな！

2012/12/01　立命館慶祥中学校・高等学校
非常勤講師：三上 武久

はじめに

今年からお世話になっている立命館慶祥中学校・高等学校には，全教室にプロジェクターかテレビモニターが付いており，視聴覚器材が自由に使える環境が整っている。そこで，念願だったMathematicaでグラフなどの説明を試みた。Mathematicaはバージョン6　以降(現バージョンは8.0.4)，非常に使い勝手が良くなっており，私のような経験の浅い者でも簡単に教材が作れるのが魅力である。

■生徒の実態を把握しなければ適切な教材は作れない

先生方は毎年，生徒の気質やレベルが異なり，同じ内容（例えば三角関数）を教えるにしても，前年度と同じアプローチの仕方では理解させるのが難しいということは日常的に実感しておられることだろう。
特に最近は，抽象的論理思考は苦手で，具体的・視覚的にものを考える生徒が増えて来ている。そういう事情も鑑みて「こんなものあったら良いな！」（とある某家具屋さん入ったら，同じキャッチコピーのアナウンスが流れていた。）と思う数学教材を日曜大工的にDIY精神でMathematicaを使って作ってみた。プログラムは未熟で恥ずかしいが，Mathematicaを使い始めてようやく数ケ月という私にも，或る程度のプログラムが作成できるのがMathematicaの魅力だと思う。

■素晴らしいManipulate機能

なんといってもMathematicaのバージョン6で付加されたManipulate機能（動的に変数を動かす機能）は圧巻である。変数を動かすことによってグラフ等が変化する様子を生徒に見せることは，理解に非常に役に立つと思う。
Mathematicaの文法自体もＣ言語や（C++）、Fortran　その他の言語よりは具体的で分かり易く短時間である程度使えるプログラムが実現可能である。

■セッティングに5分，教材作成は暇のある土日に

教室に行って，テレビモニターに分配器などをセットするのに要する時間は慣れてくると５分程度で出来るようになる。Mathematicaによるプログラム作りは暇のある土曜日か日曜日に楽しみながらやれば良い。
Mathematicaは自宅に自分用を１本持っていれば，バージョンは8.0.4から追加されたCDF ファイルという新しい形式のファイルにすることによってUSBメモリーの中にCDF　Player（無料）というものも一緒に入れておけば学校のノートパソコンでも動かすことができる。

例1　放物線と直線の交点の中点の軌跡

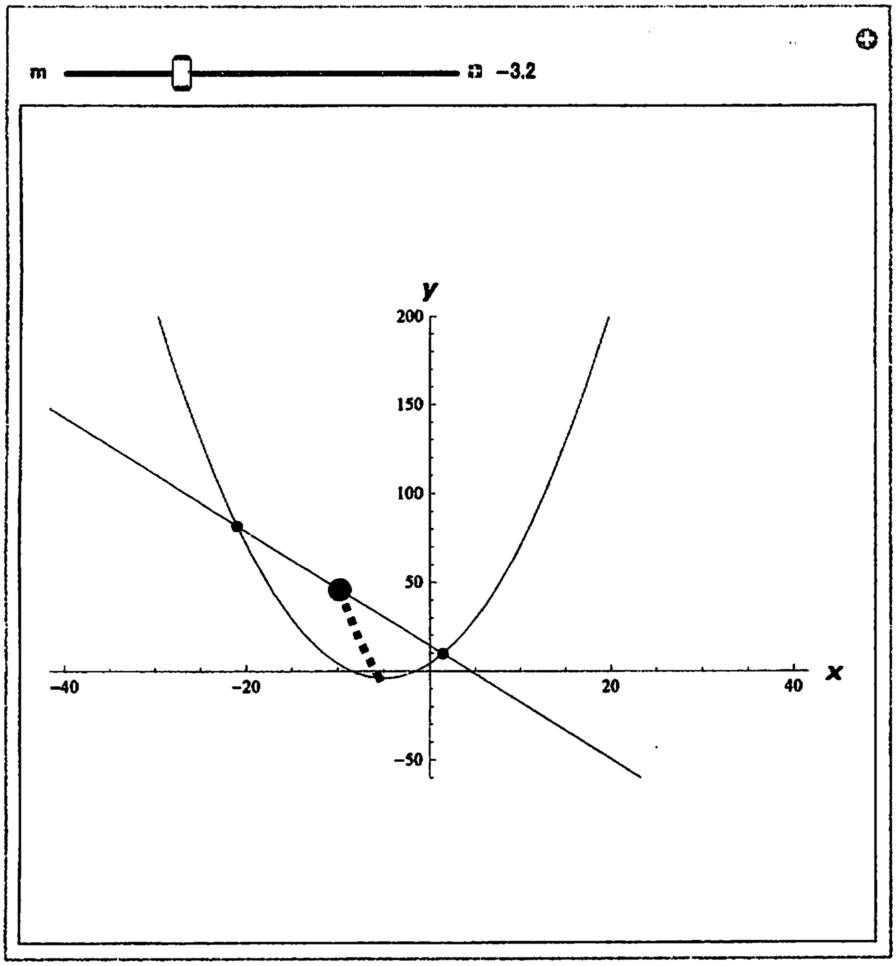
Mathematicaは2次関数と直線の共有点の座標を自動的に解いてくれるので，中点の座標を出すのは簡単である。その中点が動く様子を表現するのは，数学の問題というよりはプログラムの表現力ということになろう。

ここでは中点を赤い色で，軌跡を点線で表現してみた。プログラムは稚拙であるがあえてソースコードを公開することにした。先生方はこのプログラムを改良することによってさまざまな曲線の軌跡を描かせることができるだろう。

Wolfram Research社のDocument Centerには，豊富な例が沢山ある。それらを見れば色々な関数の使い方を学ぶことができる。

```
Clear["Global`*"];
a = Input["x²の係数をaとする。\naを入力して下さい。"];
p = Input["放物線の頂点のx座標をpとする。\npを入力して下さい。"];
q = Input["放物線の頂点のy座標をqとする。\nqを入力して下さい。"];
b = Input["直線の回転の中心の座標を(b,c)とする。\nbを入力して下さい。"];
c = Input["直線の回転の中心の座標を(b,c)とする。\ncを入力して下さい。"];
m0 = Input["傾きの初期値をm0とする。\nm0を入力して下さい。"];
Manipulate[
 sol = NSolve[{a (x - p)^2 + q == m (x - b) + c}, WorkingPrecision → 5];
 {x1 = x /. sol[[1]], x2 = x /. sol[[2]]};
 midx = (x1 + x2) / 2; midy = m (midx - b) + c;
 d := (2 a × p + m) ^2 - 4 × a × (a × p^2 + m × b + q - c);
 B1 = b - √((p - b)^2 + (q - c)/a) ; B2 = b + √((p - b)^2 + (q - c)/a) ;
 Show[
  Plot[{a (x - p)^2 + q, m (x - b) + c}, {x, -50, 50}, PlotRange → {-60, 200}],
  ListPlot[{{x1, a (x1 - p)^2 + q}, {x2, a (x2 - p)^2 + q}},
   PlotStyle → PointSize[.015]],
  Graphics[{RGBColor[1, .5, 0], PointSize[0.03],
    Point[{midx, midy}], Thickness[0.01], Dashing[{0.01, 0.01}],
    If[d ≥ 0 && x1 ≤ midx ≤ B1, First[ParametricPlot[Evaluate[
         {t, 2 a (t - b) (t - p) + c}], {t, b - √((p - b)^2 + (q - c)/a), midx}]]],
     If[d ≥ 0 && B2 ≤ midx ≤ x2, First[ParametricPlot[Evaluate[
          {t, 2 a (t - b) (t - p) + c}], {t, b + √((p - b)^2 + (q - c)/a), midx}]]]]],
    If[d < 0, Text["No Intersection", {0, 180}]], {}}]
  , PlotRange → {{-40, 40}, {-60, 200}}, AxesLabel →
   {Style["x", Medium, Italic, Bold, Blue, "Label"], Style["y",
     Medium, Italic, Bold, Blue, "Label"]}, ImageSize → {400, 400}],
 {m, m0, 40, .1, Appearance → "Labeled"},
 SaveDefinitions → True
]
```

Out[38]=



例2　アポロニウスの円

アポロニウスの円は高校数学の軌跡の代表的なものである。ここでは x軸上の２点A(a,0),B(b,0)をm:nに分ける点の軌跡を描いてみた。

In[39]:=
```
Clear["Global`*"];
a = Input["点Aの座標を(a,0)とする。\naを入力して下さい。"];
b = Input["点Bの座標を(b,0)とする。\nbを入力して下さい。"];
m = Input["AP:PB=m:nとします。mを入力してください。\nmを入力して下さい。"];
n = Input["AP:PB=m:nとします。nを入力してください。\nnを入力して下さい。"];

Manipulate[c = (m*b+n*a)/(m+n); d = (m*b-n*a)/(m-n); center = (c+d)/2; r = Abs[c-center];
 x = center + r*Cos[t]; y = r*Sin[t]; l = Line[{{a, 0}, {x, y}, {b, 0}}];
 Show[
  ListPlot[{{a, 0}, {b, 0}, {c, 0}, {d, 0}},
   PlotLabel →
    Style[Framed[Row[{Text@Style["A(", Italic, Bold, Darker[Green, 0.3], 22],
        Text@Style[a, Italic, Bold, Darker[Green, 0.3], 22],
        Text@Style[",0),", Italic, Bold, Darker[Green, 0.3], 22],
        Text@Style["B(", Italic, Bold, Darker[Green, 0.3], 22],
        Text@Style[b, Italic, Bold, Darker[Green, 0.3], 22],
        Text@Style[",0)を", Italic, Bold, Darker[Green, 0.3], 22],
        Text@Style[m, Italic, Bold, Darker[Red, 0.01], 22],
        Text@Style[" : ", Italic, Bold, Darker[Green, 0.3], 22],
        Text@Style[n, Italic, Bold, Darker[Red, 0.01], 22],
        Text@Style["に分ける点Pの軌跡", Plain, Bold, Black, 22]}]],
     12, Blue, Background → Lighter[Yellow]],
   PlotStyle → PointSize[.015]],
  Graphics[{{Green, l},
    {RGBColor[1, .5, 0], PointSize[0.03], Point[{x, y}]},
    Thickness[0.01], Dashing[{0.01, 0.01}],
    Circle[{center, 0}, r, {Pi, t}]}],
  AspectRatio → 1, PlotRange → {{-30, 30}, {-30, 30}}, ImageSize → {550, 400}],
 {x, Appearance → "Labeled"},
 {y, Appearance → "Labeled"},
 {c, Appearance → "Labeled"}, {d, Appearance → "Labeled"},
 {t, Pi, -Pi, .1, Appearance → "Labeled"}, SaveDefinitions → True]
```

x −18.3466

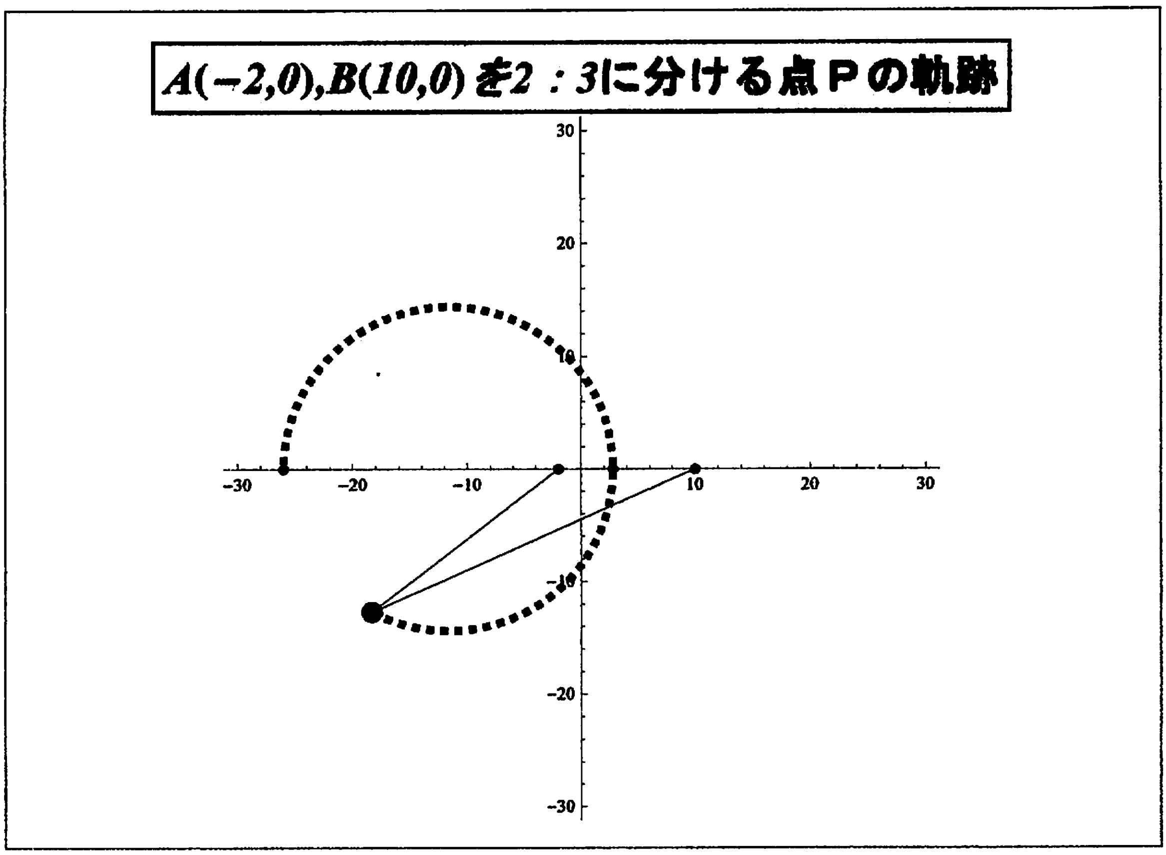
y −12.7217

c $\frac{14}{5}$

d −26

t −2.05841

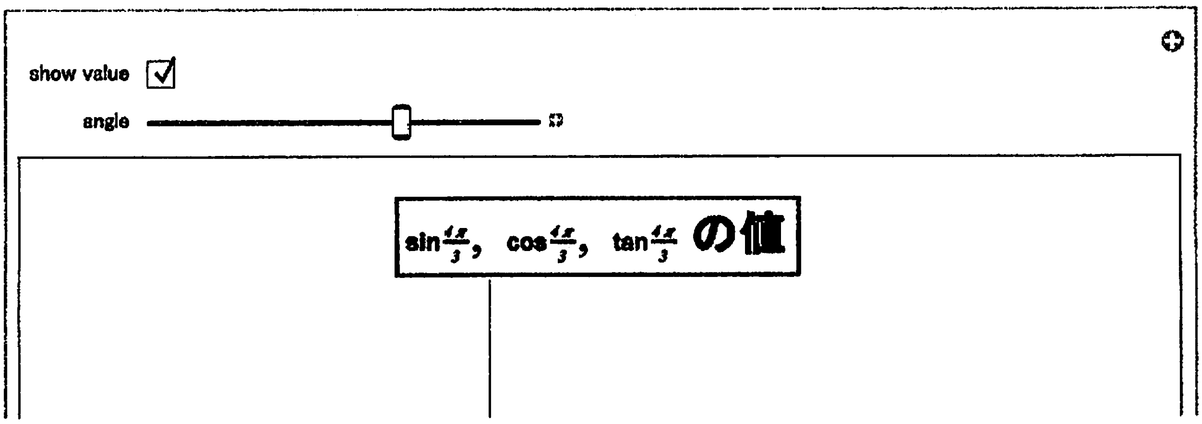
Out[44]=

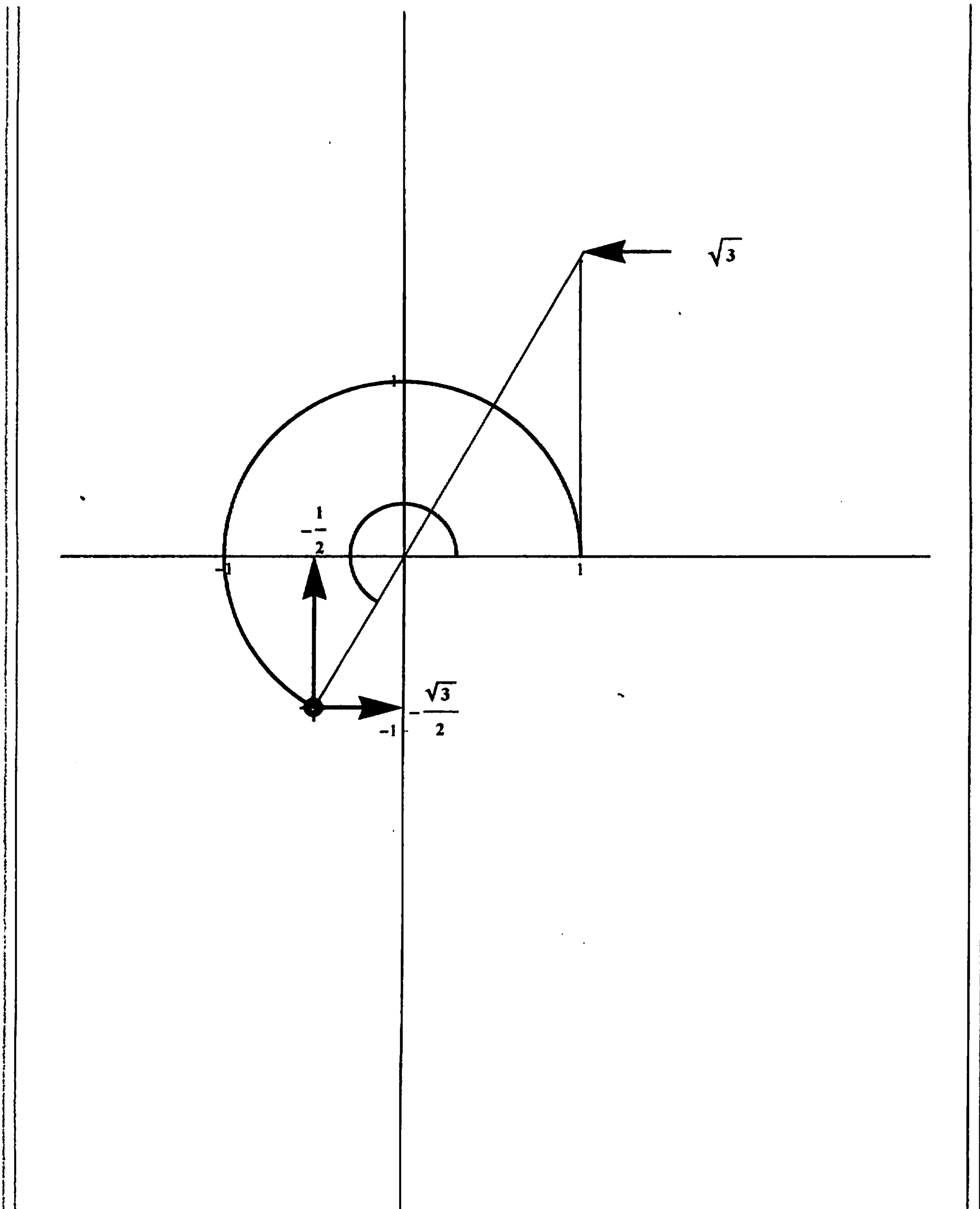


例３　各象限の代表的Sin,Cos,Tanの値

最近の生徒は拡張という概念が苦手である。代表的なものは三角関数のTanの値であるが。第一象限から第二象限への飛躍が理解できないらしい。そこで代表的な三角関数の値，30°，45°，60° etcの値付きで角度の変化に伴い，値が移り変わっていく様子をグラフで観察させる教材を作って見た。生徒はある程度納得した様子だった。

```
Manipulate[
 Module[{anglegraph},
  anglegraph[th_, showtext_] := Show[
    Graphics[{
      {Lighter[Gray, 0.5], Circle[{0, 0}, 1]},
      {Darker[Green, 0.2], Thick, Circle[{0, 0}, 1, {0, th}]},
      {Darker[Green, 0.2], Thick, Circle[{0, 0}, 0.3, {0, th}]},
      {Lighter[Gray, 0.5], Line[{{0, 0}, {Cos[th], Sin[th]},
         {1, Tan[th]}, {1, 0}}]},
      {Red, Thick, Arrowheads[0.05], Arrow[{{Cos[th], Sin[th]}, {Cos[th], 0}}]},
      {Blue, Thick, Arrowheads[0.05], Arrow[{{Cos[th], Sin[th]}, {0, Sin[th]}}]},
      {Brown, Thick, Arrowheads[0.05], Arrow[{{1.5, Tan[th]}, {1, Tan[th]}}]},
      If[showtext, Rotate[Text[Style[FullSimplify[Cos[th]], Red, Bold, 11],
         {Cos[th], -Sign[Sin[th]] 0.15}], 2 Pi, {Cos[th], -Sign[Sin[th]] 0.15}], {}],
      If[showtext, Rotate[Text[Style[FullSimplify[Sin[th]], Blue, Bold, 11],
         {-Sign[Cos[th]] 0.18, Sin[th]}], 2 Pi, {-Sign[Cos[th]] 0.18, Sin[th]}], {}],
      If[showtext, Rotate[Text[Style[FullSimplify[Tan[th]], Brown, Bold, 11],
         {1.8, Tan[th]}], 2 Pi, {1.8, Tan[th]}], {}],
     }],
    PlotLabel → Style[Framed[Row[{Style["sin", "Title", Blue, 12],
         Text@Style[ptctrl, Italic, Bold, Darker[Green, 0.3], 12],
         Text@Style[",   ", Red, 24],
         Text@Style["cos", "Title", Red, 12],
         Text@Style[ptctrl, Italic, Bold, Darker[Green, 0.3], 12],
         Text@Style[",   ", Red, 24],
         Text@Style["tan", "Title", Brown, 12],
         Text@Style[ptctrl, Italic, Bold, Darker[Green, 0.3], 12],
         Text@Style[" の値", Plain, Bold, Black, 24]}]], 12,
      Blue, Background → Lighter[Yellow]],
    PlotRange → {{-1, 2}, {-2.8, 2.8}}, ImageSize → 550, BaseStyle → {10},
    Axes → True, Ticks → {{-1, 1}, {-1, 1}}, PlotRangePadding → 1];
  DynamicModule[{pt = {Cos[ptctrl], Sin[ptctrl]}, pt2 = {ptctrl, 0}},
   LocatorPane[Dynamic[pt,
     {(pt = {Cos[pt2[[1]]], Sin[pt2[[1]]]}) &,
      (pt = Normalize[#];
        pt2 = {If[pt2 == {2 Pi, 0}, 2 Pi, Mod[ArcTan[#[[1]], #[[2]]], 2 Pi]], 0}) &,
      (pt = Normalize[#]; ptctrl = pt2[[1]]) &}],
    Dynamic[anglegraph[
      If[pt2 == {2 Pi, 0}, 2 Pi, Mod[ArcTan[pt[[1]], pt[[2]]], 2 Pi]], showvalue]]]]
 ],
 {{showvalue, False, "show value"}, {False, True}},
 {{ptctrl, Pi / 24, "angle"}, 0, 2 Pi, π/12}, TrackedSymbols ⧴ {showvalue, ptctrl}]
```





終わりに

時間と紙数の関係で3個の例しか示せなかったがこの他に有益なプログラムは沢山作成できる。またWolfram Research社では，最新版のMathematicaの新機能をご紹介するセミナーを無料で行っています。
もしご興味がある先生がいれば、訪問して説明してくれるとのこと。連絡先は以下の通り。

ウルフラムリサーチ　小寺可那子：kanakok@wolfram.com

参考文献

教材を作り始める先生方は，Wolfram ResearchのDemonstrations Project内を覗いてみて下さい。沢山の参考になる資料　があります。この点アメリカの水準の高さには驚かされます。

Wolfram Research Demonstrations Project Calculating the Path of a Point on a Sliding Ladder contributed by Theodore Gray

Wolfram Research Demonstrations Project Illustrating Tangent with the Unit Circle contributed by Abby Brown