平成 24 年 1 月 28 日（土）第 80 回数学教育実践研究会

正弦曲線の長さについて

岩見沢東高等学校　　吉町　隆明

1　はじめに

数学Ⅲで、積分法の中に曲線の長さを求める分野がある。
正弦曲線の長さは、どのようにして求めるのかを考えてみることにした。

2　正弦曲線　$y=\sin x\,(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ の曲線の長さを求める。

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+(y')^2}\,dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2-\sin^2 x}\,dx$$

$$= 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ここで、 $\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}$ を変形するために、$\sqrt{1+t}$ の展開を考える。

$g(t)=(1+t)^\alpha$ のとき

$g'(t)=\alpha(1+t)^{\alpha-1}$,　　　$g''(t)=\alpha(\alpha-1)(1+t)^{\alpha-2}$, ・・・・

$$g^{(n)}(t)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\times\cdots\times(\alpha-n+1)(1+t)^{\alpha-n} \quad \cdots ②$$

また、$g(t)=(1+t)^\alpha = 1+\dfrac{1}{1!}g'(0)t+\dfrac{1}{2!}g''(0)t^2+\dfrac{1}{3!}g'''(0)t^3+\cdots\cdots$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}t^n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

②において、$t=0$ のとき

$$g^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\times\cdots\times(\alpha-n+1)$$

これを③に代入して

$$g(t)=(1+t)^\alpha = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\times\cdots\times(\alpha-n+1)}{n!}t^n$$

$\alpha=m$（m は自然数）のとき、$(1+t)^m=\displaystyle\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}t^n$ において、

二項係数 $\dbinom{m}{n}=\dfrac{m(m-1)(m-2)\times\cdots\times(m-n+1)}{n!}$ を任意の実数 α に対して

$\begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\times\cdot\cdot\cdot\times(\alpha-n+1)}{n\,!}$ ， $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}=1$ として拡張すると

上の級数は、$(1+t)^{\alpha} = \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} t^{n}$ と書ける。

そこで、$\alpha=\dfrac{1}{2}$ のときを考えると、

$$(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\times\cdots\cdots\times(\frac{1}{2}-n+1)}{n\,!} t^{n}$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,!}\times\frac{1}{2^{n}}\times(-1)\times(-3)\times(-5)\times\cdots\times(-2n+3)t^{n}$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\,!\times 2^{n}}\times 1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-3)t^{n}$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\,!\times 2^{n}}\times\frac{(2n)!}{2^{n}\times n!\times(2n-1)}t^{n}$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\times(2n)!}{(2n-1)\times 2^{2n}\times(n\,!)^{2}}t^{n}$$

一般論より、上記の等式は、開区間（－１，１）で成立する。

特に、$\alpha=\dfrac{1}{2}$ のとき、Ｒａａｂｅの判定法（３補足(1)を参照）により、

$x=-1$，１ でも収束することがわかり、Ａｂｅｌの定理（３補足(2)を参照）の証明より、上の級数は、閉区間[－１，１]で、一様収束する。

よって、閉区間[－１，１]では、項別積分が許されることになる。

ここで、$t=-\dfrac{1}{2}\sin^{2}x$ とすると、

$$\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^{2}x} = 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\times(2n)!}{(2n-1)\times 2^{2n}\times(n\,!)^{2}}\times(-\frac{1}{2}\sin^{2}x)^{n}$$

①に代入して

$$\frac{l}{4\sqrt{2}} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\times(2n)!}{(2n-1)\times 2^{2n}\times(n!)^{2}}\times(-\frac{1}{2}\sin^{2}x)^{n}\right\}dx$$

項別積分が許されるので、

$$= \frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\times(2n)!}{(2n-1)\times 2^{2n}\times(n!)^{2}}\times(-\frac{1}{2})^{n}\times\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n-1)\times 2^{3n} \times (n!)^2} \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx \quad \cdots\cdots ④$$

次に、$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} xdx$　について考える。

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n} xdx$ とおくと、

n＝0のとき　$I_n = \frac{\pi}{2}$,　　n＝1のとき　$I_1 = 1$　,

n≧2のとき　$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

よって、$I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} I_0 = \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$　$\cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑤

⑤を④に代入して、

$$\frac{l}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((2n)!)^2}{(2n-1)\times 2^{5n} \times (n!)^4} \times \frac{\pi}{2}$$

以上から、正弦曲線　$y = \sin x$（$0 \leqq x \leqq 2\pi$）の曲線の長さは、

$$l = 2\sqrt{2}\pi \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((2n)!)^2}{(2n-1)\times 2^{5n} \times (n!)^4} \right\}$$ で表される。・・・　⑥

3　補足

（1）Ｒａａｂｅの判定法とは、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$　$(a_n > 0)$ において、

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) < -1$　ならば　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は、収束する。

適当に n_0 をとると、すべての　$n \geqq n_0$ に対して

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) \geqq -1$　ならば　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

（2）Ａｂｅｌの定理とは、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が　ｒ（＞0）で、

かつ、この整数級が、$x = r$ で収束するならば、

$\lim_{x\to r-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$, $\lim_{x\to -r-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$

i.e.級数が、閉区間[０，ｒ]（または閉区間[－ｒ、０]）で一様収束するので、上の端点を含めた連続性は導かれている。

4　以上から

0＜k＜1のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \frac{k^{2n}}{2n-1}\right\} \quad \cdots ⑦$$

が成り立つ。

ただし、$(2n)!! = (2n)(2n-2)(2n-4)\times\cdots\times 4\times 2$

$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)(2n-5)\times\cdots\times 3\times 1$　,

$0!! = 1, (-1)!! = 1$

⑦ において、$k^2 = \dfrac{1}{2}$　のとき⑥を満たすことがわかる。

<u>この証明は、後述に証明問題として提起してある。</u>

5　ここで、楕円　$x^2 + \dfrac{y^2}{2} = 1$ の周の長さを求めてみる。

$x = \cos t, y = \sqrt{2}\sin t$　とおくと、

周の長さは、$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$　より

$$\frac{s}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t + 2\cos^2 t}\,dt = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 t}\,dt$$

$\therefore$　$s = 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\dfrac{1}{2}\sin^2 t}\,dt$　となる。

これは、①と同じ式になり、

正弦曲線　$y = \sin x$　（$0 \leqq x \leqq 2\pi$）の曲線の長さと楕円　$x^2 + \dfrac{y^2}{2} = 1$

の周の長さとは、一致することがわかった。

6　次に、正弦曲線　$y = m\sin x (m > 0)$ と楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$

の場合で考えてみる。

$y = m\sin x (m > 0)$ のとき、

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+m^2\cos^2 x} = \sqrt{1+m^2}\sqrt{1-\frac{m^2}{1+m^2}\sin^2 x} \quad \cdots ⑧$$

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ のとき、$x = a\cos t, y = b\sin t$ とおくと、

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}=b\sqrt{1-\frac{b^2-a^2}{b^2}\sin^2 t}\quad (\because b>0)\cdots⑨$$

ここで、$b=\sqrt{1+m^2}, \dfrac{b^2-a^2}{b^2}=\dfrac{m^2}{1+m^2}$ のとき、

⑧，⑨は、$\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$ となり、

$a^2=1, m^2=b^2-1$ および $0<\dfrac{b^2-1}{b^2}<1$ を満たす。

従って、$y=\sqrt{b^2-1}\sin x$ $(0\leqq x\leqq 2\pi,\ b>1)$ の曲線の長さと、楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の周の長さは等しくなる。

7　最後に

以上から、$y=\sqrt{b^2-1}\sin x$ $(0\leqq x\leqq 2\pi,\ b>1)$ の曲線の長さと、

楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の周の長さは、共に $\displaystyle 4b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{b^2-1}{b^2}\sin^2 x}\,dx$ となり、

等しくなることがわかった。

8　参考文献

基礎課程　微分積分学　上見練太郎　他共著　共立出版　１９８８年

証明問題

$$\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\frac{k^{2n}}{2n-1}\right\}$$ において、

$k^2=\dfrac{1}{2}$ のとき、$\displaystyle\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((2n)!)^2}{(2n-1)\times 2^{5n}\times(n!)^4}\right\}$ に等しくなることを証明しなさい。

ただし、$(2n)!!=(2n)(2n-2)(2n-4)\times\cdots\times 4\times 2$

$(2n-1)!!=(2n-1)(2n-3)(2n-5)\times\cdots\times 3\times 1$ ，

$0!!=1, (-1)!!=1$

【証明】

$k^2=\dfrac{1}{2}$ のとき、$\displaystyle\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{2n-1}=\frac{((2n)!)^2}{(2n-1)\times 2^{5n}\times(n!)^4}$

が成り立つことを言えばよい。

$(2n)!!=2^n\times n!$ および $(2n-1)!!=\dfrac{(2n)!}{(2n)!!}$ を左辺に代入すると、右辺になる。