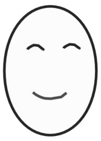
第１３２回数実研レポート　２０２５･1･２５
「畑には何を植える　・　・　･」への序章

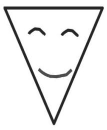
横山 徹

【はじめに】
　前回のレポートの最後に記載した通りオリジナル教材は平成１７年度用の教材として作成中のものを平成１６年度に２年生の進路講習として使用した[１]で、異動により授業の教材としては使用することなく、プトロタイプのまま２０年間放置していましたが、現行行の新しい学習指導要領に合わせて、そのまま改訂したものが[２]です。そこで今回は当時の生徒の様子を思い浮かべながら、「実際に授業で使用していたら」という視点で現行の教育課程に合わせて作り直してみました。

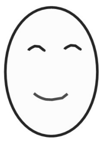
【ポートフォリオを考える】



　２つの金融商品ＡとBがあって１００万円で購入すると１年後にＡは２万円、Bは６万円の利益が期待されるとしたらどうしますか？



　当然Bを買いますよね。でも収益が期待できるならリスクも大きいのでは？



　ではAとBのリスクを表１の値で考えてみましょう。

表１　リスクとリターン

	平均 （リターン）	標準偏差 （リスク）
A	2	0.4
B	6	3.5

　収益（リターン）は平均、リスクは標準偏差として数値化することができます。正規乱数を用いたシミュレーションで可視化してみましょう。

手順１
１ 表計算ソフトで平均0、標準偏差1となる正規乱数を発生させてるには＝NORMSINV(RAND())を使います。平均を2、標準偏差を0.4にしたければ＝NORMSINV(RAND())*0.4＋2です。

２ AとBのデータを1000個作って平均と標準偏差を求めます。

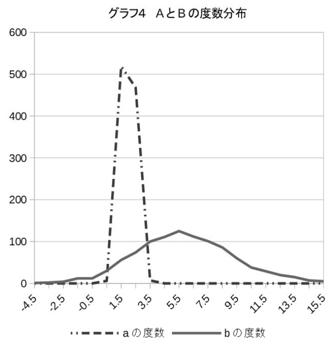
　作成したデータで基本統計量を計算したものが表２です。ほぼ表１に近い値になりましたね。では度数分布表も作り、グラフにしてみましょう。

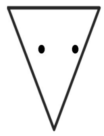
表2　仮想データと基本統計量

	A	B	
1	2.3824	9.3015	
2	1.9471	7.3838	
・		・	
・		・	
999	2.6039	4.2089	
1000	1.153	2.1868	
最大	3.4696	15.652	＝MAX(範囲)
最小	0.6517	-5.2895	＝MIN(範囲)
平均	1.9845	5.9307	＝AVERAGE(範囲)
標準偏差	0.4105	3.3942	＝STDEVP(範囲)
相関係数	0.06290798276		＝CORREL(範囲)

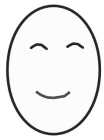
表3　AとBの度数分布表

階級			階級値	度数		累積度数	
以上		未満		A	B	A	B
-5	～	-4	-4.5	0	1	0	1
-4	～	-3	-3.5	0	2	0	3
-3	～	-2	-2.5	0	4	0	7
-2	～	-1	-1.5	0	12	0	19
-1	～	0	-0.5	0	12	0	31
0	～	1	0.5	6	30	6	61
1	～	2	1.5	519	56	525	117
2	～	3	2.5	468	74	993	191
3	～	4	3.5	7	100	1000	291
4	～	5	4.5	0	111	1000	402
5	～	6	5.5	0	125	1000	527
6	～	7	6.5	0	112	1000	639
7	～	8	7.5	0	101	1000	740
8	～	9	8.5	0	86	1000	826
9	～	10	9.5	0	60	1000	886
10	～	11	10.5	0	38	1000	924
11	～	12	11.5	0	29	1000	953
12	～	13	12.5	0	20	1000	973
13	～	14	13.5	0	15	1000	988
14	～	15	14.5	0	7	1000	995
15	～	16	15.5	0	5	1000	1000
合計				1000	1000	***	***





　エッ！Bは儲かると思っていましたが、赤字になることもあるんですね。逆にAは大儲けすることはありませんが、大損することもないですね。



　その通りです。そこで100万円全てをAかBの一方に投資するのではなく、分散して購入することでリスクを分散します。
　それではAとBの比率を
　　　$(1-k):k\quad k=0\,,0.2\,,0.4\,,0.6\,,\ 0.8\,,1$
　として１００万円分を購入した場合にリスクとリターンがどう変化するか調べてみましょう。

表5　AとBを(1-k):kとしたときの 値の 変化

	A(k=0)	k=0.2	k=0.4	k=0.6	K=0.8	B(K=1)
1	2.3824	3.7662	5.15	6.5338	7.9176	9.3015
2	1.9471	3.0344	4.1218	5.2091	6.2965	7.3838
		・			・	
		・			・	
999	2.6039	2.9249	3.2459	3.5669	3.8879	4.2089
1000	1.153	1.3598	1.5665	1.7733	1.98	2.1868
最大	3.4696	5.5328	7.7222	10.366	13.009	15.652
最小	0.6517	0.4857	-0.928	-2.382	-3.836	-5.29
平均	1.9845	2.7738	3.563	4.3522	5.1415	5.9307
標準偏差	0.4105	0.7725	1.395	2.0534	2.7217	3.3942

表6 リスクとリターンの推移

	リターンμ	リスクσ
k=0(A)	1.9845	0.4105
K=0.2	2.7738	0.7725
K=0.4	3.563	1.395
K=0.6	4.3522	2.0534
K=0.8	5.1415	2.7217
k=1(B)	5.9307	3.3942

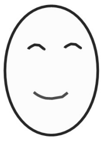
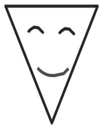
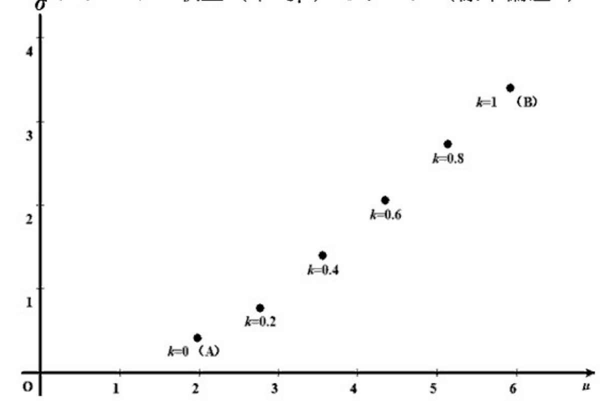


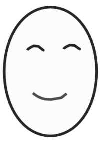
表６をグラフにしてみましょう。



２次関数のようにも見えますが。

グラフ７　収益（平均μ）とリスク（標準偏差σ）





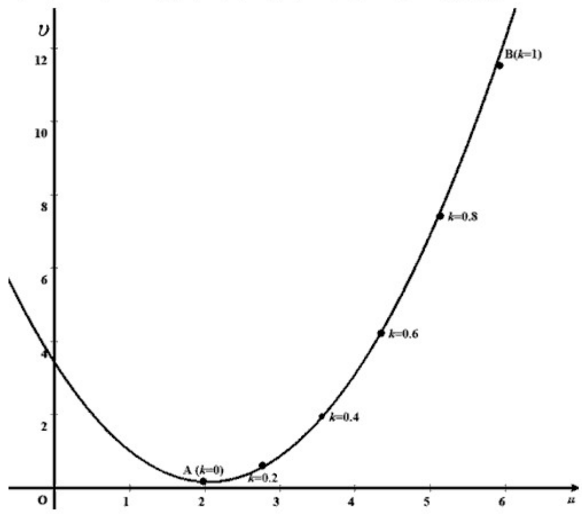
標準偏差σのかわりに分散 v を使って $v-\mu$ グラフにすると２次関数になりますよ。 $v=\sigma^2$とすると表８になります。

表8

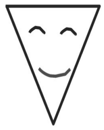
	リターンμ	分散v
k=0(A)	1.9845	0.1685
K=0.2	2.7738	0.5967
K=0.4	3.563	1.946
K=0.6	4.3522	4.2164
K=0.8	5.1415	7.4079
k=1(B)	5.9307	11.52

$v=0.7756\mu^2-3.1825\mu+3.4225$ として、この２次関数のグラフといっしょに表示したものが下のグラフ９になります。

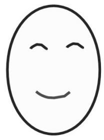
グラフ９　収益（平均μ）とリスク（分散 $v=\sigma^2$）



２次関数の式は理論値になりますが、乱数を発生させて求めた値とほとんど一致していることが分かります。大雑把に言えばこの２次関数の平方根を考えればグラフ７を表す式を求めることができるはずです。



どうやって式を求めたのでしょうか？理論値ということはデータから求めたわけではなさそうですが….。



数学Bの教科書にある確率分布の知識が必要になりますが、簡単に概要を説明しましょう。

AとBの確率変数を X_A、 X_B とすると、 X_A と X_B はそれぞれ正規分布 $N_A(2,0.4^2)$ と $N_B(6,3.5^2)$ に従います。

ここで新しい確率変数として

$$X=(1-k)X_A+kX_B \quad 0\leqq k\leqq 1$$

とおくとXはAとBの金融商品を $(1-k):k$ の比率で購入することを表します。AとBのデータにはほとんど相関がありませんのでXの平均μと分散vとの間には

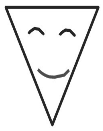
$$\mu=2(1-k)+6k$$

$$v=0.4^2(1-k)^2+3.5^2k^2$$

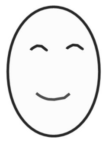
が成り立ちます。上式から $k=\dfrac{\mu-2}{4}$ として下の式に代入すると

$$v=0.7756\mu^2-3.1825\mu+3.4225$$

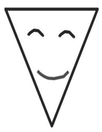
になります。



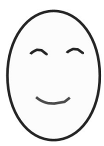
なるほど。数学Bを選択すると分かるのですね。では分散vを標準偏差σに置き換えたときの式が何時勉強するのでしょうか？



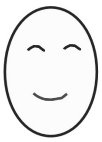
数学Ⅲでは無理関数を学びますし、数学Cでは２次曲線を学びますが、早く知りたければ古本屋で（運がよければ）110円で参考書を買えるかもしれません。数学Bの確率分布も同じですが、こちらは比較的コンパクトにまとまっているのでインターネットで正規分布を検索すると本を買う必要はないかもしれません。



さきほどの説明で「AとBのデータにはほとんど相関がありませんので」と話をしていましたが、相関がある場合にはダメなのでしょうか。



$X=(1-k)X_A+kX_B$ の平均は同じ式で表せますが分散を求める式には相関係数を含む少し複雑な式になります。高校では相関が０の特別な場合（独立といいますが）だけを勉強します。でも理論式を求めることができなくてもシミュレーションは同様に行うことができます。



ＡとＢのデータを両方とも降順に並べてみましょう。データを並べ替えただけなので、最大、最小、平均、標準偏差は表２と同じですが、相関係数は１に近い値になています。

表10　降順による変化

	A	B
1	0.6517	-5.2895
2	0.7888	-3.3848
·	·	·
·	·	·
999	3.2052	15.64
1000	3.4696	15.652
最大	3.4696	15.652
最小	0.6517	-5.2895
平均	1.9845	5.9307
標準偏差	0.4105	3.3942
相関係数	0.9981152324	

表２と表１０のデータを散布図で比較してみましょう。

図11　表2の散布図

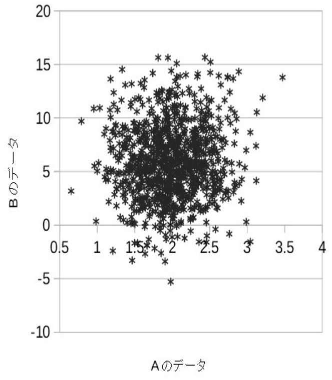
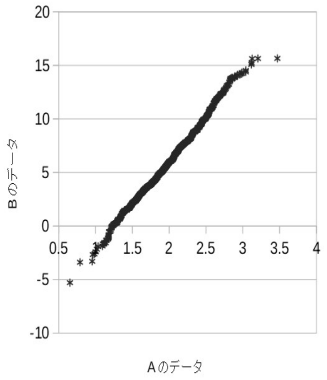
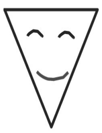
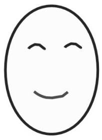


図12　表10の散布図





相関係数が１の場合になりました。あとは同じようにＡとＢの比率を
$(1-k):k \quad k=0,0.2,0.4,0.6,0.8,1$
としてリスクとリターンを計算してグラフにするだけですね。



先ほどと同じように表にしてみましょう。平均と標準偏差の変化が表１３ですね。ここでリスクとして標準偏差ではなく分散をとると表１４になります。この値をグラフ９に追加するとグラフ１５になります。白抜きの点が相関係数が１の場合の点です。値は少し曲線の上にずれていますね。

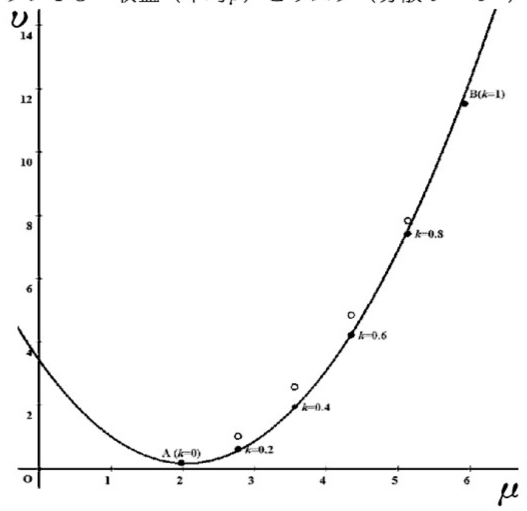
表１３　ＡとＢを(1-k):kとしたときの値の変化

	A(k=0)	k=0.2	k=0.4	k=0.6	K=0.8	B(K=1)
1	0.6517	-0.537	-1.725	-2.913	-4.101	-5.2895
2	0.7888	-0.046	-0.881	-1.715	-2.55	-3.3848
		·			·	
		·			·	
999	3.2052	5.6921	8.179	10.666	13.153	15.64
1000	3.4696	5.9061	8.3427	10.779	13.216	15.652
最大	3.4696	5.9061	8.3427	10.779	13.216	15.652
最小	0.6517	-0.537	-1.725	-2.913	-4.101	-5.2895
平均	1.9845	2.7738	3.563	4.3522	5.1415	5.9307
標準偏差	0.4105	1.0069	1.6036	2.2004	2.7973	3.3942

表14　リスクとリターンの推移

	リターンμ	リスクσ
k=0(A)	1.9845	0.4105
K=0.2	2.7738	1.0069
K=0.4	3.563	1.6036
K=0.6	4.3522	2.2004
K=0.8	5.1415	2.7973
k=1(B)	5.9307	3.3942

グラフ１５　収益（平均μ）とリスク（分散 $v=\sigma^2$）



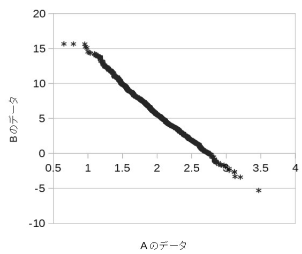
そうなると次はＡは昇順のままにしてＢの方を降順にしてみたくなりませんか？でも予測は付くと思うので課題にしましょう。

練習
表１０でＢのデータだけを降順に並べて基本統計量を求め、表１３、表１４と同様に平均と分散を求めてグラフにしなさい。

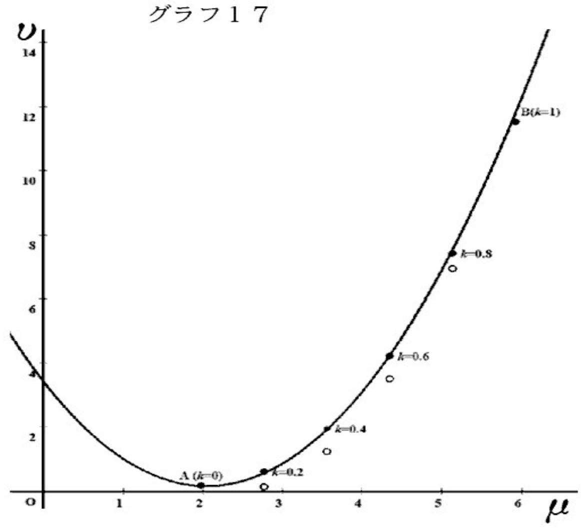
＜参考＞
降順と昇順の組み合わせ

相関係数は-0.997
となり、下のグラフの
白抜きの点になります。

グラフ16



グラフ１７



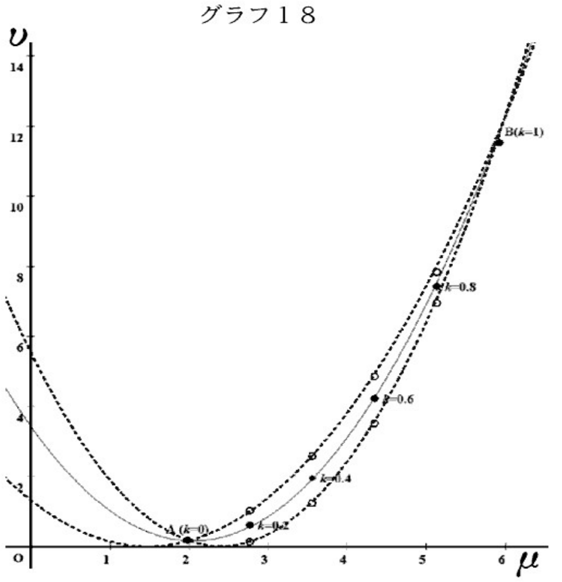
相関係数が±1の場合について２次関数を理論値から求めると

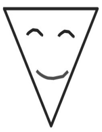
$r=1$ のとき　$v=0.601\mu^2-1.738\mu+1.323$

$r=-1$ のとき　$v=0.961\mu^2-4.53\mu+5.523$

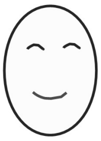
となり、下記の点線部分のグラフになります

グラフ１８



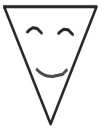


データの並び方を変えて相関係数を変化させると平均と分散による座標は相関係数が１の時とー１の時の間になり、正か負かで相関係数が０の時の上になるか下になるかが決まりそうですね。具体的な方程式を求めたり、もっと詳しいことを知りたければ数学科で統計学を勉強したらよいですね。

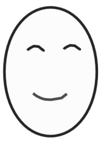


数学科を選択すべきかは何とも言えません。数学の研究分野は広範囲に及ぶので、具体的な内容となると入学した学校で同じ研究をしている先生がいるかどうかを調べる必要があります。

逆に言うと同じ大学でも数学科で研究している人がいなくて農学部や経済学部で研究している人がいるかもしれませんよ。



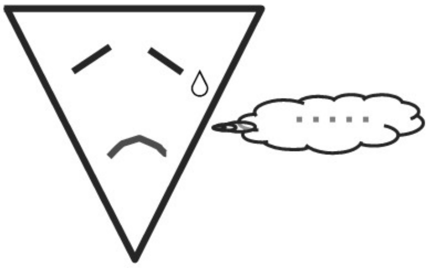
経済学は分かりますが、農学部とも関係があるのでしょうか？

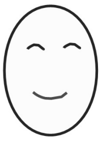


金融商品AがいちごでBがキュウリの収益だったら農業ですね。同じ学科の先生でも異なる学会に所属していたり、違う学科の先生が同じ学会に所属して共著で論文を書くこともよくあります。

機械工学科の選択科目に計量経済学があったり、人文科学の分野でも心理学や言語にかかわる分野では数学を頻繁に使うことだってあります。

自分の進学先では数学は使わないし、受験科目にも数学はないから不要だと思って手を抜いていると後悔しますよ！





話を本題にもどしましょう。収益とリスクが異なる２つの金融商品を組み合わせると収益とリスクの座標は点Aから点Bの間の曲線上にあることが分かります。金融商品が多いほど収益とリスクの組み合わせは増えます。

研究１

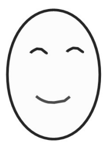
表１に平均と標準偏差の異なる金融商品を加えて様々な組み合わせで収益とリスクがどう変化するかを調べてみよう。

研究2

金融商品以外のもので異なるものを組み合わせてリスクを分散させている事例を探してデータを入手し、組み合わせの比率を変えて平均と標準偏差を求めてみよう。データがなければ適当に平均と分散を考え、正規乱数を発生させて考察してみよう。

研究3

与えられた相関係数を持つような２つの正規乱数の発生方法をインターネットなどを利用して調べ、実際に発生させて研究１の考察に使用してみよう。

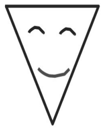


最近では日経平均などを指標にして資産を運用するファンドが増えています。この分野ではアメリカの経済学者マルコヴィッツが１９９０年にノーベル経済学賞を受賞しています。

- 収益率の平均は大きいほど望ましい
- 収益率の標準偏差は小さいほど望ましい

という２つを同時に実現するという考え方です。統計学の研究が数学科に限ったものではないことが理解できたと思います。

この分野ではアクチュアリーという仕事（資格）もあり、１次試験では「数学」「会計･経済･投資理論」「年金数理」「生保数理」「損保数理」が、２次試験では生保、損保、年金のコースごとに専門の試験があり、最難関の試験の一つと言われています。現在は国内に５６００人ほどの合格者がいるそうです。



難しそうな試験ですね。
でも先生なら
合格できますよね？

【余談１】

今回作成したデータは有効フロンティアの説明やリスクのない定期預金、国債との関係を表示できるグラフにはなりませんでした。平均や標準偏差の取り方によって有効フロンティアを説明ができる場合もあります。リスク分散効果がはっきりと表れるのは[２]で記載したように負の相関を持つデータを組み合わせる方がよいでしょう。表１９は[２]で使用したデータです。AとBを(1−k):kで組み合わせた時の基本統計量は表２０，２１になります。グラフ２２は表２１の$\upsilon-\mu$グラフです。

表１９　１０００万当たりのリターン

	A	B	c(国債等)
リターン（収益）	50（万円）	80（万円）	30（万円）
リスク（分散）	25	100	0
相関係数	−0.5		＊＊＊

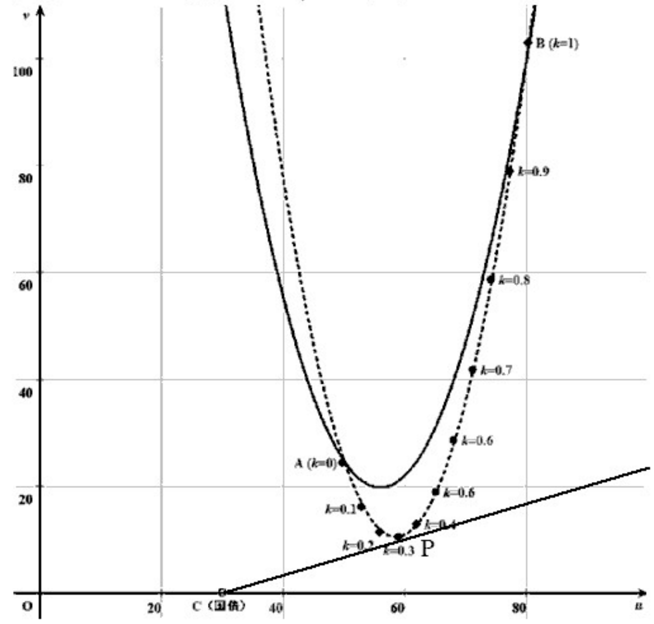
表20　AとBを(1-k):kとしたときの 値の変化

	A(k=0)	K=0,1	k=0.2	K=0.3	k=0.4	K=0.5	k=0.6	K=0.7	K=0.8	K=0.9	B(K=1)
1	46.833	50.551	54.269	57.988	61.706	65.424	69.143	72.861	76.579	80.298	84.016
2	52.505	53.883	55.26	56.638	58.015	59.393	60.77	62.148	63.525	64.903	66.28
			･						･		
			･						･		
999	47.038	50.297	53.556	56.816	60.075	63.334	66.594	69.853	73.112	76.372	79.631
1000	47.681	50.872	54.063	57.254	60.445	63.637	66.828	70.019	73.21	76.401	79.592
最大	66.646	66.786	66.925	69.183	73.935	79.021	85.725	92.558	99.391	106.22	113.06
最小	36	41.956	45.123	46.6	48.077	49.555	49.672	49.694	49.345	49	48.646
平均	49.8	52.851	55.902	58.952	62	65.054	68.105	71.156	74.207	77.257	80.308
標準偏差	4.9322	4.0125	3.3832	3.2195	3.5856	4.3499	5.344	6.4629	7.6519	8.8829	10.141
分散	24.327	16.1	11.446	10.365	12.857	18.921	28.558	41.768	58.551	78.907	102.83

表21　平均と分散の変化

n	k	μn	σn	vi
1	0	49.80	4.93	24.33
2	0.1	52.85	4.01	16.10
3	0.2	55.90	3.38	11.45
4	0.3	58.95	3.22	10.37
5	0.4	62.00	3.59	12.86
6	0.5	65.05	4.35	18.92
7	0.6	68.10	5.34	28.56
8	0.7	71.16	6.46	41.77
9	0.8	74.21	7.65	58.55
10	0.9	77.26	8.88	78.91
11	1	80.31	10.14	102.83

グラフ２２　表２１の$\mu-\upsilon$グラフ



AとBのデータの相関関数は−0.5ですが、実線は無相関として計算した場合のグラフです。シミュレーション結果とは一致しませんが、相関関数を−0.5として計算すると点線のグラフになり、シミュレーション結果と一致しています。また有効フトンティア ＊もはっきりと表れて、リスクのない国債Cから点線に接線を引くことでリスク商品A、Bとリスクのない国債Cとの組み合わせを線分CPとして表示することができます。

＊有効フトンティア：

グラフ２２では２次関数の $\mu \geqq 0.3$ の部分をいう。 $\mu < 0.3$ と同じ分散であっても $\mu \geqq 0.3$ ではより多くの収益を期待できることから 意味のある組み合わせは $\mu \geqq 0.3$ のときになる。

相関係数が−0.5の場合の理論式は

$$\upsilon = 0.194\mu^2 - 22.778\mu + 677.78 \qquad (＊)$$

で点線のグラフになります。独立の場合の式は

$$\upsilon = 0.139\mu^2 - 15.56\mu + 455.56$$

で実線のグラフになります。シミュレーションのデータが理論値に近いことから[２]に記載した手抜きのレンチン調理方法の「なんちゃって近似式」で求めてみると $k = 0.3$ の時の値 $(58.95, 10.37)$ を頂点と考え、求める式を

$$\upsilon = a(\mu - 58.95)^2 + 10.37$$

とします。すべての (μ_n, υ_n) が２次関数上にあると仮定して

$$\upsilon_n = a(\mu_n - 58.95)^2 + 10.37 \qquad n = 1,2,3,\cdots 11$$

が成り立つとすると

$$\sum_{i=1}^{11} \upsilon_i = a\sum_{i=1}^{11}(\mu_i - 58.95)^2 + 10.37 \times 11$$

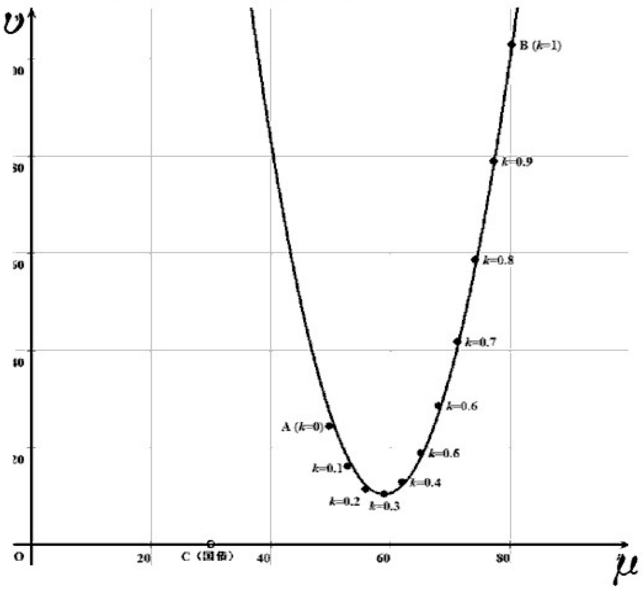
になりますから $404.637 = 1433.36a + 114.07$ より

$a = 0.2027$が求まり、近似式

$$\upsilon = 0.2027\mu^2 - 23.9\mu + 714.89 \qquad (＊＊)$$

を得ることができます。この式とデータを重ねたものが次のグラフになります。

グラフ２３　近似式のグラフ



２つの確率変数X,Yが相関を持つ場合、分散を求めるには相関係数を用いて

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y)$$

を使い（＊）を求めますが、正規乱数を１０００個発生させた場合のシミュレーションでは近似的に求めた（＊＊）式も理論値に近い値になっていることが分かります。

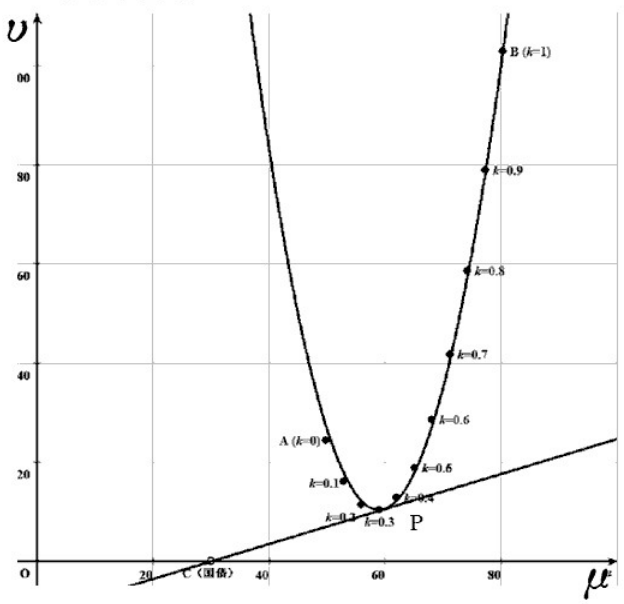
国債を表す点Cから２次関数に引いた接線の方程式を

$\upsilon=a(\mu-30)$ とおき、（＊＊）の近似式に代入して判別式を0として計算すると $a=0.3529$が求まり、接線の方程式は

$$\upsilon=0.3529(\mu-30)$$

で次のグラフになります。

グラフ２４



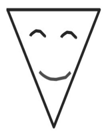
計算を続けると接点Pは $(59.82\,,10.52)$ となり、$\mu=50(1-k)+80k$に $\mu=59.82$ を 代入すると $k=0.327$ が求まります。すなわちPにおける金融商品AとBの比率はAを0,673、Bを0.327になるように投資した場合であることが分かります。このときのリスクを標準偏差で表すと $\sigma=\sqrt{10.52}=3.24$ になります。これらの理論値との比較は[２]で確認して下さい。

あとはＰとＣの購入比率を考えることでリスクのない国債Ｃとリスク商品Ａ，Ｃの購入比率を考えればよいことになります。

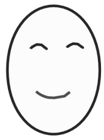
農業や工業分野への応用も同様に考えることができますので[２]をご覧ください。

【余談２】

身近には正規分布になる事例で溢れ、シミュレーションの題材に事欠きませんが、正規乱数を用いると少なからず確率分布の知識も必要になります。そこで基本統計量を使わずにシミュレーションできる簡単な例を紹介しておきます。



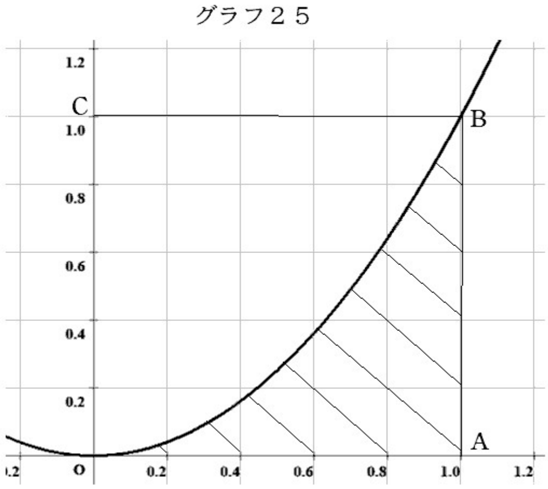
シミュレーションをするため正規乱数を使いましたが、もっと簡単なシミュレーションはありますか。



０と１の間の数値を発生させる一様乱数があります。一様乱数を利用して曲線で囲まれた領域の面積を求めてみましょう。

一辺の長さが１の正方形OABCは２次関数$y=x^2$の一部分を含んでいます。乱数を発生させて斜線部分の面積を求めてみましょう。

グラフ２５

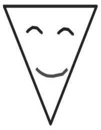


正方形の面積は１になります。この中に１０００個の点をランダムに発生させて斜線部分に発生した点の個数をカウントすることで比率から斜線部分の面積を求めることができます。

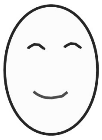
図２６

	A	B	C	D	E
1	x座標	y座標			
2	0.667734957	0.284165769	1	①	
3	0.154492856	0.00850595	1		'=RAND()
4	0.862875172	0.733569762	1	②	=IF(B2<A2^2,1,0)
5	0.520578003	0.754464422	0		

A2とB2のセルには①の関数で乱数を発生させます。あとはC2のセルに②を打ち込んで１０００個コピーするだけです。



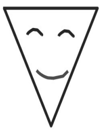
なるほど、②の意味はB2の値がA2の値の２乗よりも小さければ1，そうでなければ0を表示しなさいということですね。



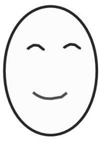
その通りです。１０００個コピーして合計すると３３６個が斜線部分に発生しました。斜線部分の面積は0.336前後になると予測されます。発生させる乱数の個数を増やせば正確な値に近付きます。実際に積分を使って求めると $\frac{1}{3}$ なので、なかなかの精度ですね。

図２７

999	0.898958495	0.439954111	1
1000	0.914202938	0.810616107	1
1001	0.552409845	0.326377442	0
1002		合計	336
1003			



積分は何時習うのですか？

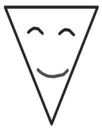


簡単な関数については数学Ⅱで、少し複雑な関数は数学Ⅲで学びます。

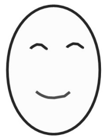
課題　一様乱数を次の区間で発生させよう。
（１） $-1\leqq x\leqq 1$ （２） $-1\leqq x\leqq 5$

課題
　１辺が２の正方形の中に半径１の円を書き、正方形の中に乱数を発生させて円周率の近似値を求めなさい。

課題
　１辺が２の立方体の中に半径１の球を書き、球の体積を求めなさい。

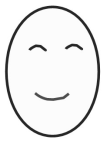


でも複雑な曲線に囲まれた面積を計算して何の役に立つのでしょうか？

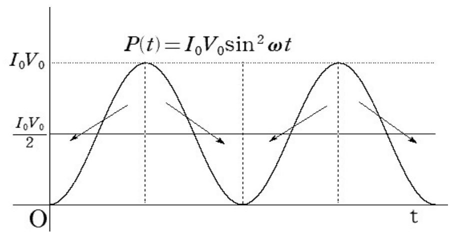


x 軸と y 軸の単位が長さの場合にはグラフ２６は面積ですが、横軸が時間で縦軸が早さの時はどうでしょうか？面積は移動距離になりますよね。早さが変化するときのことを考えると複雑な曲線になることもありますよ。

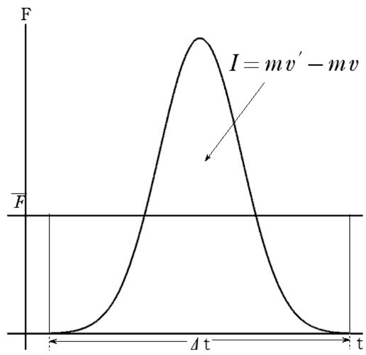
研究
　面積や移動距離のように２つの数値をかけて定義されるものにどのようなものがあるでしょうか。



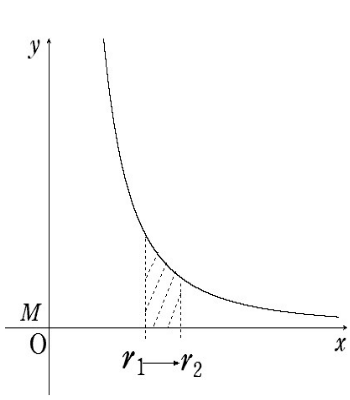
面積で表すことのできる数値は他にもたくさんの例があります。横軸が時間で縦軸が電力なら面積は電力量 $W=Pt$ で電力 P が一定の時には長方形の面積ですね。でも交流電源の場合には電力 P も $P=I_0V_0\sin^2\omega t$ のように時間で変化しますから電力量 W は下の曲線で囲まてた部分の面積になります。山の上部を崩して谷を埋めれば高さを揃えることはできます。



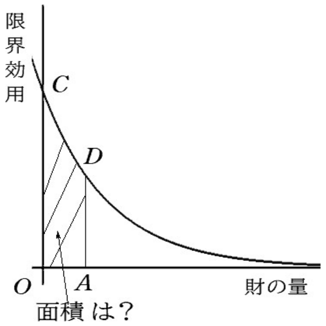
横軸が時間、縦軸が力なら面積は力積で、右のグラフになりますが、面積が同じになるように長方形の高さ $\overline{F}$ を考えることができます。



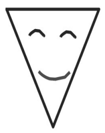
大雑把な説明になりますが、横軸が位置で縦軸が静電気力や万有引力なら斜線部分の面積は移動した時の仕事になります。



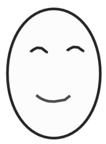
お金を使う時も満足度は面積で表すことができます。横軸に商品の購入量、縦軸が購入時の「ワクワク感」（限界効用）とすると購入量が増えると下のグラフの通りワクワク感は減りますが、面積は商品を購入したときの満足度（効用）を表し増加します。



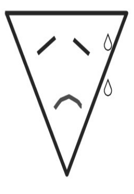
数学では簡略化して「面積」として扱いますが、自然科学や工学、社会科学の分野では別の単位を付けて様々な用途に用います。大学で専門の勉強をしていると一風変わった他の分野の専門科目の授業を受けることもあります。問題解決のための手段として同じ数学的な考え方を使っているからですが、数学は様々な分野との接着剤、まあ昔風に言うと仲人のようなものでしょうか。



平均の意味が少し分かってきました。でも数学を知らなくても電気製品は使えますし、引力を意識しなくても歩けます。物を買えば面積に関係なく満足できますから数学をそこまで知る必要はないのでは？



確かに生活には困りませんね。おまけに大学入試も多様化して数学を必要としない選抜方法もありますから。
でも入学して授業について行けるかは全く別の話ですけどね。



【おわりに】
［２］では慣例に従ってリターンを縦軸、リスクを標準偏差として横軸にとってグラフを作成しましたが、今回は数学Ⅰや数学Bの授業で使用することを考えてリターンを横軸とし、縦軸に分散をとることで２次関数として扱いました。また時間短縮のために表計算ソフトの関数を使用して基本統計量を求めましたが、定義に従って表計算ソフト上で作表させて分散や共分散、相関係数を求めさせることにも当然のことながら意義があり、正規乱数のデータについても事前に教員が準備することで授業時間を短縮することもできます。学校の状況次第ということになるでしょうが、数学Ｂで統計分野を取り扱わない場合には［１］のように数理モデル（経営戦略モデル）として数学Ⅰや数学Bの課題学習として教材化できると思います。２０年前の資料で入手困難（私も処分しています）ですが、該当部分を［２］の資料として添付しましたので著者別索引でご確認下さい。

［２］はシミュレーションの値と理論値の違いを確認するために教員用として作成しましたが、今回のデータからもシミュレーション結果は理論値に近い値であることが分かると思います。［２］でもシミュレーション部分だけを取り出すことで数理探究などのテーマとして使用することができると思います。

【参考文献】
［１］「総合的な学習の時間への教材及びテーマの提供について」
第５９回北海道算数数学教育研究大会
から「問題解決のための戦略のモデル化について」
［２］「畑には何を植える？かまぼこの原料はどうする？」　第１３１回数実研レポート

［１］［２］は正規乱数を用いたシミュレーションとして作成しましたが、事前に一様乱数で簡単なシミュレーションを行った方が生徒には分かりやすいと思います。一様乱数を用いたシミュレーションとしては

［３］「高校数学の周辺～他分野への応用」
第５８回北海道算数数学教育研究大会
［４］「高校数学の周辺～コンピュータで解析する」
第８６回全国算数数学教育研究大会
［５］「どうする分布表？」第１２９回数実研レポート

があり、このレポートの【余談２】では［３］の一部を転用しました。［４］には少し難易度の高いものも掲載しています。［５］の【余談１】には一様乱数と正規乱数を同時に使用したシンプルなものを掲載しています。

教材として使用する場合には今回のレポートの前半部分を授業で扱い、興味のある生徒には［１］の数理モデル教材を、さらに興味のある生徒には［２］を使用するのが効率的だと思います。

［６］「身近な時系列データで考察してみようⅠ」
第１３２回数実研レポート
には２０年前の教育課程との関連を記載していますが、現行の学習指導要領でも同様に扱うことができると思います。