「２つの線分の交点の位置ベクトルや内分比を求める裏技（教師用）」

北海道札幌東高等学校　佐藤　　清　先生

のレポートを読んで

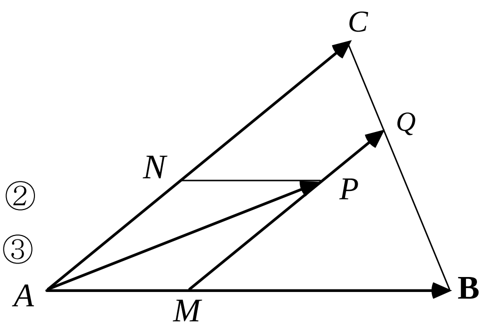
平成１４年１１月３０日

北海道羽幌高等学校　田　中　拓　己

数学のいずみＨＰの実践記録・レポートに載っている、札幌東高校　佐藤清先生のレポート「２つの線分の交点の位置ベクトルや内分比を求める裏技（教師用）」を読んで、形はちがう式ですが $\vec{p}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ について、私も同じような使い方をしています。こんな見方はどうでしょうか。

１直線上にない３点Ａ，Ｂ，Ｃの位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とするとき、次のことを証明せよ。 (1)　点Ｐが、Ａ，Ｂ，Ｃの定める平面上にあるために必要十分な条件は、Ｐの位置ベクトル $\vec{p}$ が次の形に書かれることである。 $\vec{p}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$，$l+m+n=1$ (2)　上の式でl，m，n がすべて正ならば、Ｐは△ＡＢＣの内部にある。

（証明）



(1)　Ｐを平面ＡＢＣ上の点とすると

$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$　・・・・・　①

と書ける。これを位置ベクトルで表すと

$\vec{p}-\vec{a}=m(\vec{b}-\vec{a})+n(\vec{c}-\vec{a})$　・・・・・　②

$\vec{p}=(1-m-n)\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$　・・・・・　③

よって、$l=1-m-n$ とおくと

$\vec{p}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$，$l+m+n=1$　・・・・・④

逆に、④が成り立てば、③，②，①が導かれるから、Ｐは平面ＡＢＣ上にある。

(2)　$l>0$，$m>0$，$n>0$ のとき、

$\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB}$

とおくと、$0<m<1$ だから、Ｍは辺ＡＢ上（端は除く）の点となる。そして、①から

$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}-m\overrightarrow{AB}=n\overrightarrow{AC}$　・・・・・　⑤

よって、直線ＭＰはＡＣと平行である。これと辺ＢＣとの交点をＱとすると

ＭＱ：ＡＣ＝ＭＢ：ＡＢ＝（$1-m$）：１から

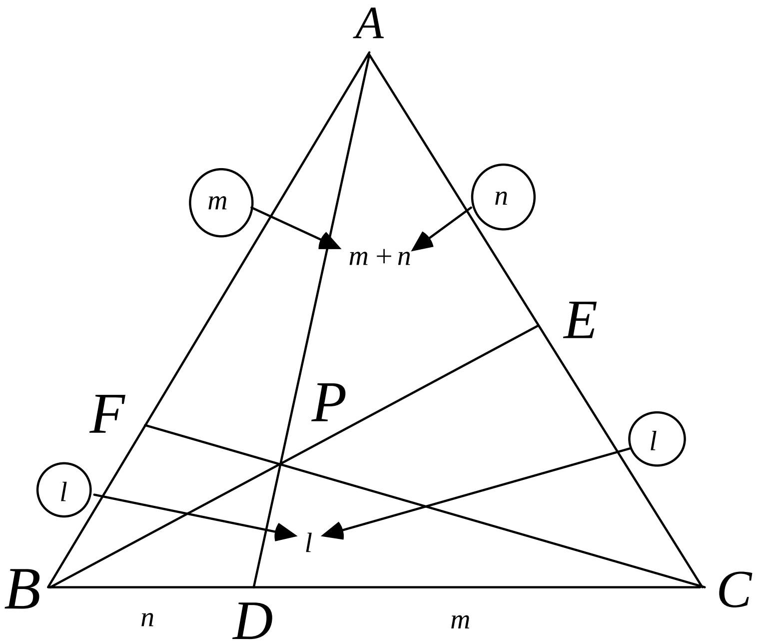
$\overrightarrow{MQ}=(1-m)\overrightarrow{AC}$　・・・・・　⑥

⑤，⑥で、$1-m=l+n>n>0$ だから、$\overrightarrow{MP}$，$\overrightarrow{MQ}$は同方向で、ＭＰ＜ＭＱ
したがって、Ｐは線分ＭＱ上（端は除く）にあるから、△ＡＢＣの内部にある。

（証明終わり）

チャート式　代数・幾何　より

　このとき､注目したいのが $\vec{p}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ と △ＡＢＣ の辺などの内分比の関係です。図のようになっていて、❶，❷，❸の特徴があります。



❶　ＣＤ：ＤＢ＝m ：n，　ＢＦ：ＦＡ＝l ：m，　ＡＥ：ＥＣ＝n ：l
　といったように、l，m，nを繰り返す。

❷　ＡＤ，ＢＥ，ＣＦの交点Ｐについて、ＡＤ上の点Ｐとして着目したとき、
　　ＡＰ：ＰＤ＝$(m+n)$ ：l
　となっていて、$m+n$ はＡＦ＋ＡＥ，l はＢＦ（ＣＥ）に対応できる。
　ＢＥ，ＣＦについても同様の見方をする。

❸　$\vec{p}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ の$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$の係数は、頂点Ａ$(\vec{a})$に対する辺ＢＣに関する比に出てこない文字l、$\vec{b}$，$\vec{c}$も同様にm，nを対応する。

❶, ❷, ❸を使って、佐藤先生の［問題］を考えてみます。

［問題］

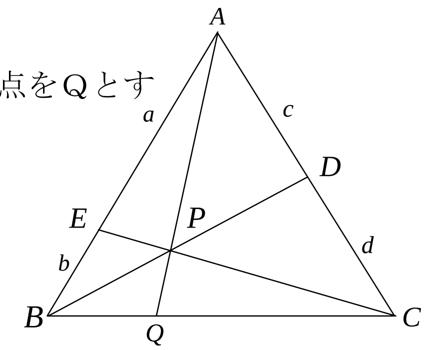
三角形ＡＢＣにおいて、$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とし、辺ＡＢ，ＡＣの内分点Ｄ，Ｅを次のように定める。

ＡＤ：ＤＢ＝a : b，　ＡＥ：ＥＣ＝c : d

このとき、ＤＣとＢＥの交点をＰ、ＡＰとＢＣの交点をＱとする。

(1)　ＢＱ：ＱＣの比を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{AP}$ を$\vec{b}$ と$\vec{c}$ で表せ。



［作図］

❶よりＢＤとＣＥは同じ値で対応させればよいので、b と d の最小公倍数 bd に置きかえます。このとき、ＡＤ，ＡＥは ad，bc が対応し（図１）、bd，ad，bc を繰り返すので、ＢＱ，ＱＣに bc，ad を対応させる（図２）。このとき、ＡＰ，ＰＱは❷より、$ad+bc$，bd が対応。

図１

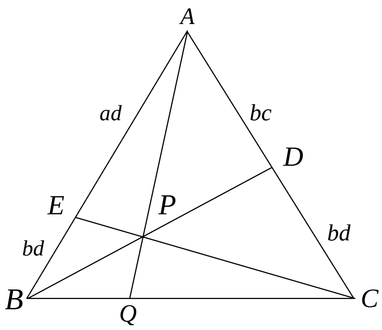


図２

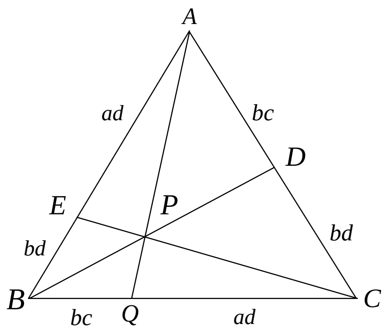
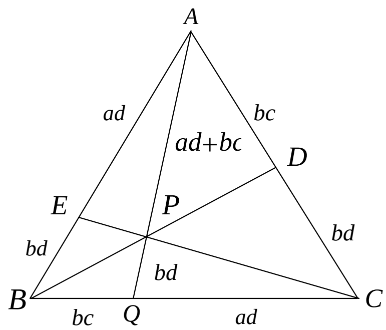


図３



(1)　図２より　ＢＱ：ＱＣ＝bc : ad

(2)　図３より計算しても良いが、❸を使うと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}&=\frac{bd}{bd+ad+bc}\overrightarrow{AA}+\frac{ad}{bd+ad+bc}\overrightarrow{AB}+\frac{bc}{bd+ad+bc}\overrightarrow{AC}\\&=\frac{bd}{bd+ad+bc}\vec{0}+\frac{ad}{bd+ad+bc}\vec{b}+\frac{bc}{bd+ad+bc}\vec{c}\\&=\frac{ad}{bd+ad+bc}\vec{b}+\frac{bc}{bd+ad+bc}\vec{c}\end{aligned}$$

以上

問題１　△ＡＢＣにおいて線分ＡＢを２：１に内分する点をＭとし、線分ＡＣを３：２に内分する点をＮとする。また、２つの線分ＣＭとＢＮとの交点をＰとし、直線ＡＰと辺ＢＣとの交点をＱとする。このとき

(1)　ベクトル$\overrightarrow{AP}$を$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$で表せ。

(2)　ベクトル$\overrightarrow{AQ}$を$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$で表せ。

(3)　面積の比 △ＡＢＰ：△ＢＣＰ：△ＣＡＰ を求めよ。

問題２　平面上に△ＡＢＣと点Ｐがあり $3\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AP}$ である。このとき △PAB、△PBC、△PCA の面積比を求めよ。