平成２４年６月２日

第８１回数学教育実践研究会　レポート

$-2\leq x\leq 1$のとき$-4\leq x^2+2x\leq 6$はなぜダメ？

釧路商業高等学校　杉本　拓也

１.発表の動機

釧路商業高校３年目の杉本です。前回、前々回の発表で、愛知県の林様よりご高評と林様の御実践のご紹介のお手紙をいただきました。あらためて、数実研のネットワークのすごさを感じいたしました。林様、数実研事務局長の河村様にこの場を借りて御礼申し上げます。

今回は授業中に生徒から「なんでダメなの？」という疑問の声が上がったので、１時間かけて生徒たちに考えさせたら、意外とおもしろい解答が出てきたので、発表します。

３年生の授業にて。就職試験や公務員試験等の対策も兼ねて、問題演習させていたら、ある程度力がついてきたので、試しに「青チャートの問題」をやらせてみました。

> xが$-2\leq x\leq 1$の範囲を動くとき
> $y=(x^2+2x+3)(x^2+2x-2)-5(x^2+2x)+2$
> の最大値，最小値と，そのときのxの値を求めよ。

$x^2+2x=A$とおき、$y=(A-2)^2-8$と変形し、「Aの変域は新たに考えないといけないね」というところまで授業は進みました。しかし…

「先生！　$-4\leq A\leq 6$　です！」

という誤答が出てきました。理由を聞くとおもしろくて、

「$0\leq x^2\leq 4$、$-4\leq 2x\leq 2$　なので　$0+(-4)\leq x^2+2x\leq 4+2$　つまり$-4\leq A\leq 6$」

という発想をしていました。この発想を生徒に発表させたあと、クラス全体が、「なるほど！」と$-4\leq A\leq 6$を支持しました。どうも生徒にとっては納得できる物だったようです。

「この空気だと、$A=(x+1)^2-1$　（$-2\leq x\leq 1$）のグラフかいて正答を提示しても納得しなさそうだな…」という空気を感じた私。

「よし、次回$-4\leq A\leq 6$は正しいか？間違いか？先生を納得させられる理由を考える授業をします」

生徒たち「納得させられたら、平常点あがりますか？」

私「よし、班全員たんまりアップします！」

生徒たち「よーし、やるぞー！」と、なんとも現金な生徒たち。その授業で出た発想がユニークなのでレポートします。

２.授業の流れ

	生徒の動き	教師の働きかけ
２分	班ごと分かれディベート体制に。	身だしなみ指導
	$-2\leq x\leq 1$のとき$-4\leq x^2+2x\leq 6$　は正しいか？	
導入８分	「正しい。前の授業でＡ君が言ったとおりの理由で。」 「違う。わざわざこういう授業をしているから。」	「どうすれば、判定できるだろうか？」
	「…」	「もし、正しいならば、x^2+2xの最大値は？」
	「そりゃ、６だよね」	「最大値６。最大値と一緒に書くことって？」
	「$x=$〇のとき」	「つまり、『x^2+2xに$x=$〇を代入して、最大値６になる$x=$〇が存在するか？』存在すれば、【正しい】存在しなければ【正しくない】ってことで判定できないかな？」
	「確かに！」 「先生！最小値が－４になるか、を調べてもできますか？」	「いい考えですね！実は【正しい】ならば、最大値６かつ最小値－４だと言わないとダメなんですよね。【正しくない】はどちらか一つ反例をあげればＯＫ。（うち数Ａやらないんだよなぁ…）」
展開Ａ１５分	$x=$〇にいろいろな値を代入して、x^2+2xの値を求めていく。 「どうも、最大値６にはならなさそうですね…」	「本当？今、いくつかの値を調べただけで、もしかしたら調べていない点で最大値６とるかもね。」
	Ｂ君「グラフで説明(figure.1)」	「なるほど。どうも正しくないことは分かりました。しかし、前のＡ君の説明はあってそうでしたよね？どこが問題だろうか？」

<table>
<tr>
<td>展
開
B

1
5
分

ま
と
め
1
0
分</td>
<td colspan="2">

「$0 \leq x^2 \leq 4$，$-4 \leq 2x \leq 2$
よって　$-4 \leq x^2 + 2x \leq 6$
は何がいけなかったのか？

</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>

「…。」

「最大値４、最小値０」

「あ！！わかったかも。」

<table>
<tr><td></td><td>$y = x^2$
最小値のときのxの値</td><td>$y = 2x$
最大値ときのxの値</td></tr>
<tr><td>$0 \leq x^2 \leq 4$</td><td>$x = 0$</td><td>$x = 2$</td></tr>
<tr><td>$-4 \leq 2x \leq 2$</td><td>$x = -2$</td><td>$x = 1$</td></tr>
</table>

↑そろってない！

A君「グラフで説明(figure.2)」
「すごい、さすがA」

「先生、じゃあ$0 \leq x^2 \leq 4$
$-4 \leq y \leq 2$だと
$-4 \leq x^2 + y \leq 6$になりますか？」

</td>
<td>

「$0 \leq x^2 \leq 4$の最大値、最小値は？」

「最大値･最小値とセットで書くのは？それがヒントです。」

素晴らしい解答がでましたね！最大値６は「$x^2 = 4$かつ$2x = 2$のとき」という前提ですが、これが間違い。両方同時に最大値はとらないですね。今回。」

「おお、ユニークな発想ですね！グラフを合成するという発想ですね。できたグラフがまさに正しいグラフです。B君と同じグラフですね！」
「つまり$-2 \leq x \leq 1$のとき
$y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$
のグラフと同じですね！つまり、正しい解き方はx^2+$2x$を平方完成したグラフを出すことで求められることがわかりました。」
「x^2」と「$2x$」はどちらも「x」使うのが原因です。
「いい視点です。xとyが無関係（独立変数）だとＯＫなんですね（確率や統計の話に絡めたいなぁ)。」
※チャイムが鳴る。

</td>
</tr>
</table>

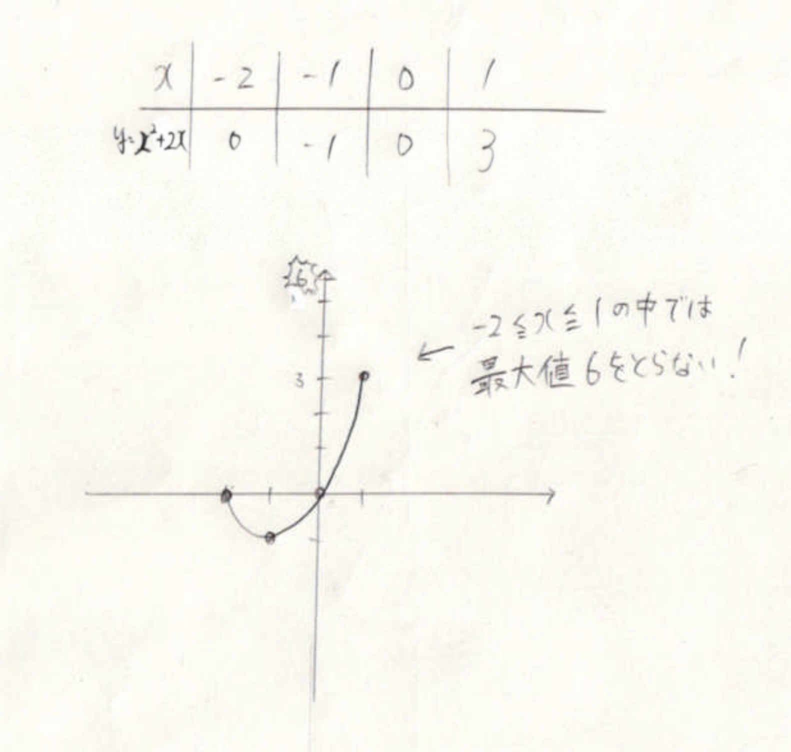

figure.1

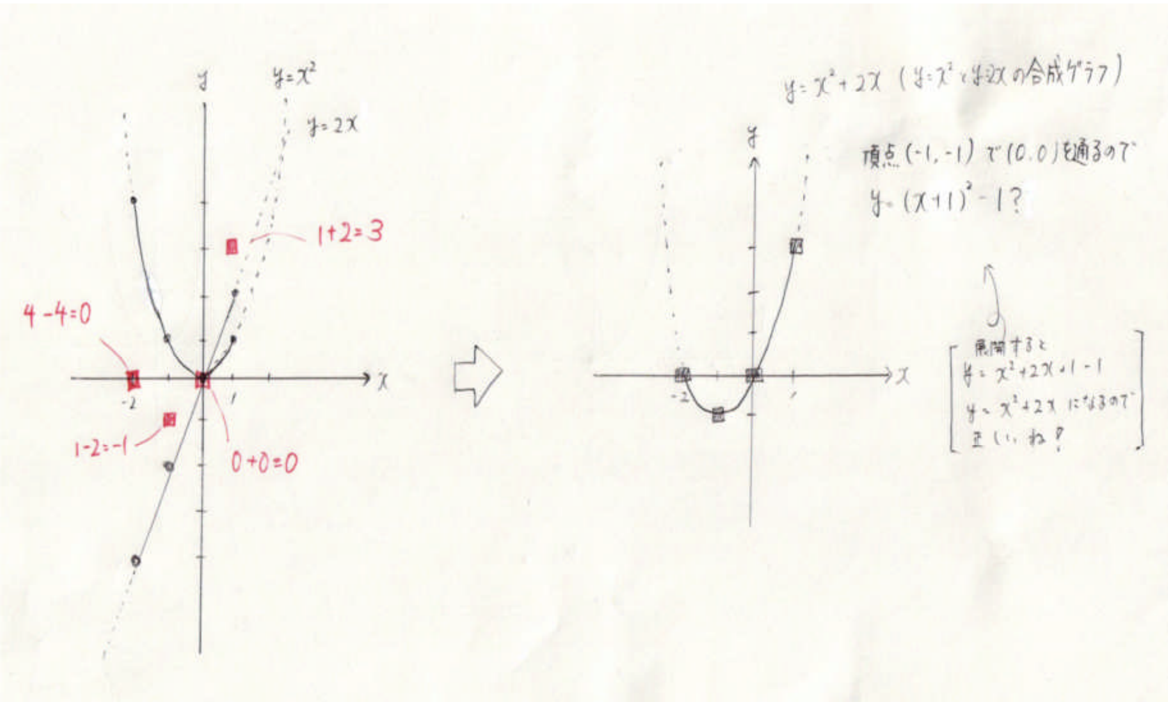

figure.2

３.生徒はなぜ「$0 \le x^2 \le 4$ かつ $-4 \le 2x \le 2 \Rightarrow -4 \le x^2 + 2x \le 6$」で納得するのか？

前回のレポートでもありましたが**【数学が苦手な生徒の「わかる」は「直感的にわかる」】のではないか**と思われます。確かに左辺や右辺をそのままたせばいいので直感的に納得しやすいと思われます。しかし、そこには**「互いの最大値を同時にとることはない」という考え方がないのが間違える原因だ**と推測しています。本校はカリキュラム上確率や論理を履修していません（2011 年時)。そのことが今回の間違えを誘発したとも考えられます。それを考えると旧数Ａの汎用性を身にしみて感じた次第です。

とはいえ、私もよく競馬で「１００円かけて万馬券をあて、その金で万馬券をあて、その金で万馬券をあてれば億万長者だ」などと妄想します。私の腕ではその確率がゼロに限りなく近いことを考えずに…。

４.青チャートの教育的価値の高さ

よく進学校でも使われる「チャート式 基礎からの数学（青チャート)」。基礎的な問題から、基礎的知識を応用して徳用な問題まで、幅広くあり、利用価値の高い参考書だと私自身は思ってます。その価値を高めるには「なぜその解き方をしようとしたか」という点を掘り下げるような教師の指導が必要だと思いますが、「丁寧にやるといかんせん時間がない」という現実問題が待っているかと思います。一方で生徒に任せてやらせると「理解なきやり方暗記」してできた気になっている子もでてくるのを塾講師・家庭教師時代に見てきました。

その打開策として考えているのが「先生の解説（問題の意図や着眼点、解答に至る必然的な考え方、この問題の数学的価値など）を録音してデータ化して生徒に配布し、家での予習・復習に役立ててもらう」という方法です。「時間短縮と生徒の理解なきやり方暗記を防ぐ」ことができる気がしています。その成果とノウハウがまとまりましたら、またレポート発表したいと思います。

５.最後に

一つの問題から生まれてくる生徒発信の疑問を題材に授業を展開することで、面白い着眼点の発想が生徒から出てきたことが今回一番嬉しかったことです。動機づけ理論によると内発的動機づけは①有能感、②自律性、③関係性が大切だと言われています。今回は②自律性（自分たちから生まれた疑問について、自分たちで解決しようとした）が高くなって、面白い発想が生まれたのではないか？と推測しています。この考えが正しいならば、**「思考力を高めたい問題」を扱う場合、「生徒主体となるよう授業展開を工夫する」**ことがコツだといえます。今後の指導に生かしていきます。

わかりにくい点が多々あるレポートで大変恐縮です。最後までお読みいただきありがとうございました。