相加相乗平均の対数関数を用いた証明法について

北海道上川高等学校　佐々木崇裕

通勤中の車の中でふと相加相乗平均の不等式が頭に浮かんだ。相加相乗平均の絶対不等式の証明は（左辺）から（右辺）を引いて云々という流れで教科書では扱われているが、項数が増えた時はそのやり方では大変、何か方法はないものかと考えたところ、右辺の累乗根を見て対数の素晴らしい性質を思い出し、対数関数で証明できないかと考えた。

> 相加相乗平均（２項）
>
> $x>0, y>0$のとき、$\dfrac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$

【教科書にある証明】

$\dfrac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$の両辺に２をかけた$x+y\geq 2\sqrt{xy}$を証明すればよい。

（左辺）－（右辺）$=x+y-2\sqrt{xy}$

$$=(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2$$

$$=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geq 0$$

【対数関数を用いた証明】

$\dfrac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$の両辺を底が２の対数でとった$\log_2\dfrac{x+y}{2}\geq\log_2\sqrt{xy}$を証明すればよい。

（右辺）$=\log_2(xy)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\log_2 xy=\dfrac{\log_2 x+\log_2 y}{2}$

より、$f(x)=\log_2 x$のグラフから

$$\log_2\frac{x+y}{2}\geq\log_2\sqrt{xy}$$

よって

$$\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$$

相加相乗平均（３項）

$x>0, y>0, z>0$ のとき、$\dfrac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$

【一般的な証明】

$\dfrac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$ の両辺に３をかけた $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$ を証明すればよい。

（左辺）－（右辺）$=(\sqrt[3]{x})^2+(\sqrt[3]{y})^2+(\sqrt[3]{z})^2-3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}\sqrt[3]{z}$

$$=(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{z^2}-\sqrt[3]{xy}-\sqrt[3]{yz}-\sqrt[3]{zx})$$

$$=(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z})\cdot\frac{1}{2}\{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})^2+(\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z})^2+(\sqrt[3]{z}-\sqrt[3]{x})^2\}\geq 0$$

【対数関数を用いた証明】

$\dfrac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$ の両辺を底が２の対数でとった $\log_2\dfrac{x+y+z}{3} \geq \log_2\sqrt[3]{xyz}$ を証明する。

（右辺）$=\log_2(xyz)^{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}\log_2 xyz=\dfrac{\log_2 x+\log_2 y+\log_2 z}{3}$

$f(x)=\log_2 x$ 上の点を $A(x,\log_2 x), B(y,\log_2 y), C(z,\log_2 z)$ ととると、ΔABC の重心Ｇの座標は

$G(\dfrac{x+y+z}{3},\dfrac{\log_2 x+\log_2 y+\log_2 z}{3})$ である。

$f(x)=\log_2 x$ のグラフから

$\log_2\dfrac{x+y+z}{3} \geq \log_2\sqrt[3]{xyz}$

よって

$\dfrac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$

相加相乗平均（４項）

$x>0, y>0, z>0, w>0$のとき、$\dfrac{x+y+z+w}{4} \geq \sqrt[4]{xyzw}$

【証明】

$$\frac{x+y+z+w}{4}=\frac{\frac{x+y}{2}+\frac{z+w}{2}}{2}$$

相加相乗平均より、$\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \dfrac{z+w}{2} \geq \sqrt{zw}$なので

$$\frac{x+y+z+w}{4}=\frac{\frac{x+y}{2}+\frac{z+w}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{zw}}{2} \cdots ①$$

示す式は

$$\frac{x+y+z+w}{4} \geq \sqrt[4]{xyzw} \cdots ②$$

①、②より$\dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{zw}}{2} \geq \sqrt[4]{xyzw}$を示せばよい。

$$\sqrt{xy}+\sqrt{zw} \geq 2\sqrt[4]{xyzw}$$

（左辺）－（右辺）$=(\sqrt[4]{xy})^2-2\sqrt[4]{xy}\sqrt[4]{zw}+(\sqrt[4]{zw})^2$

$=(\sqrt[4]{xy}-\sqrt[4]{zw})^2 \geq 0$

【対数関数を用いた証明】

$\dfrac{x+y+z+w}{4} \geq \sqrt[4]{xyzw}$の両辺を底が２の対数でとった$\log_2 \dfrac{x+y+z+w}{4} \geq \log_2 \sqrt[4]{xyzw}$を証明する。

（右辺）$=\dfrac{1}{4}\log_2 xyzw=\dfrac{\log_2 x+\log_2 y+\log_2 z+\log_2 w}{4}$

（左辺）$=\log_2 \dfrac{\frac{x+y}{2}+\frac{z+w}{2}}{2}$

とする。$f(x)=\log_2 x$上の点を$A(x,\log_2 x), B(y,\log_2 y), C(z,\log_2 z), D(w,\log_2 w)$とすると、対数関数のグラフから

$$\log_2 \frac{x+y+z+w}{4} \geq \log_2 \sqrt[4]{xyzw}$$

よって

$$\frac{x+y+z+w}{4} \geq \sqrt[4]{xyzw}$$

相加相乗平均（ｎ項）

$x_1>0, x_2>0, \cdots, x_n>0$ のとき、$\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$

【証明】

$\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ より、$\log_2 \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \log_2 \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ を示せばよい。

（右辺）$= \dfrac{1}{n}\log_2 x_1x_2\cdots x_n = \dfrac{\log_2 x_1 + \log_2 x_2 + \cdots + \log_2 x_n}{n}$

となる。$f(x)=\log_2 x$ 上の点を $A_1(x_1, \log_2 x_1), A_2(x_2, \log_2 x_2), \cdots, A_n(x_n, \log_2 x_n)$ とすると

各点の x, y 座標の平均をとった点 $\left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}, \dfrac{\log_2 x_1+\log_2 x_2+\cdots+\log_2 x_n}{n}\right)$ は、多角形 $A_1A_2\cdots A_n$ の内部に存在する。[ii]

$f(x)=\log_2 x$ のグラフより、

$\log_2 \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \log_2 \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$

よって

$\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$

---

[i] 底は２でなくてもよい。

[ii] この議論については、本当にこの点が多角形の内部に存在するかは厳密には示さなくてはならないが、グラフの形状から視覚的に結論づけた。