分ける？分けない？

北海道上川高等学校
岡崎知之

１．問題提起

$\displaystyle\sum_{k=10}^{50} {}_{60}C_k \cdot {}_{40}C_{50-k} = {}_nC_r$　を満たす ｎ，ｒ を求めよ。（明治大学入試問題）

どうやって解きますか…？（解答はレポートの最後で）

２．命題

自然数　l，m，n　（$n \leq m \leq l$）に対し、以下が成り立つ。

$${}_{l+m}C_n = \sum_{k=0}^{n} ({}_lC_k \cdot {}_mC_{n-k})$$

３．発見

Q．１から９までの番号札９枚から４枚を同時に引くとき、少なくとも１枚が偶数の番号である確率を求めよ。

（数研出版「新編数学A」のP49練習55）

A．余事象である「すべての札が奇数札である」確率を利用する。

$$1 - \frac{{}_5C_4}{{}_9C_4} = \frac{{}_9C_4 - {}_5C_4}{{}_9C_4} \quad \cdots（☆）$$

＊　生徒には常日頃、別解などでたしかめをすることが大切であると指導している。
　　そこで、余事象を利用しない方法も提示してみた。

偶数札が１枚の場合　$\dfrac{{}_4C_1 \cdot {}_5C_3}{{}_9C_4}$　　２枚の場合　$\dfrac{{}_4C_2 \cdot {}_5C_2}{{}_9C_4}$

３枚の場合　$\dfrac{{}_4C_3 \cdot {}_5C_1}{{}_9C_4}$　　４枚の場合　$\dfrac{{}_4C_4 \cdot {}_5C_0}{{}_9C_4}$

以上より、求める確率は

$$\frac{{}_4C_1 \cdot {}_5C_3}{{}_9C_4} + \frac{{}_4C_2 \cdot {}_5C_2}{{}_9C_4} + \frac{{}_4C_3 \cdot {}_5C_1}{{}_9C_4} + \frac{{}_4C_4 \cdot {}_5C_0}{{}_9C_4} \quad \cdots（★）$$

理屈上　（☆）＝（★）　なので、

${}_9C_4 - {}_5C_4 = {}_4C_1 \cdot {}_5C_3 + {}_4C_2 \cdot {}_5C_2 + {}_4C_3 \cdot {}_5C_1 + {}_4C_4 \cdot {}_5C_0$

ここで、

${}_5C_4 = {}_4C_0 \cdot {}_5C_4$　と考えると

${}_9C_4 = {}_4C_0 \cdot {}_5C_4 + {}_4C_1 \cdot {}_5C_3 + {}_4C_2 \cdot {}_5C_2 + {}_4C_3 \cdot {}_5C_1 + {}_4C_4 \cdot {}_5C_0$　…　（１）　となり、「２．命題」を利用した１例となる。

４．公式の意義

（1）の式は、このように言い換えることができる

例） 男子５人、女子４人の計９人のクラスで、代表者４名を選ぶ方法として、

男子・女子を分けずに選ぶ方法
${}_9C_4$ …（2）

男子・女子を分けて、合計4人になるように、それぞれから選ぶ方法
${}_4C_0\cdot{}_5C_4+{}_4C_1\cdot{}_5C_3+{}_4C_2\cdot{}_5C_2+{}_4C_3\cdot{}_5C_1+{}_4C_4\cdot{}_5C_0$ …（3）

（2）・（3）は要領が異なるものの、やっていることは同じである。
よって、<u>分けようが、分けまいが、組合せは等しくなる。</u>

５．数学的証明

$(1+x)^{l+m}=(1+x)^l(1+x)^m$ の両辺を、2項展開すると

（左辺）$=\cdots+{}_{l+m}C_n x^n+\cdots$

（右辺）$=({}_lC_0x^0+{}_lC_1x^1+\cdots+{}_lC_{n-1}x^{n-1}+{}_lC_nx^n+\cdots+{}_lC_lx^l)$

$\cdot({}_mC_0x^0+{}_mC_1x^1+\cdots+{}_mC_{n-1}x^{n-1}+{}_mC_nx^n+\cdots+{}_mC_mx^m)$

$=\cdots+({}_lC_0\cdot{}_mC_n+{}_lC_1\cdot{}_mC_{n-1}+\cdots+{}_lC_n\cdot{}_mC_0)x^n+\cdots$

係数比較によって、「2．命題」が成り立つ。

６．「1．問題提起」の解答

言葉で考えるならば、
「男子60人、女子40人の計100人のクラスで、代表者50名を選ぶ組合せ」を考えているので、**解答は、n＝100，r＝50。**

数式を利用するならば、$(1+x)^{100}=(1+x)^{60}(1+x)^{40}$ の2項展開を考えればよい。

７．補足

同様の考え方で、グループ数を3以上にした場合も、分ける場合・分けない場合に差はないと考えられる。
たまには遠回りな計算も役に立つのだなぁ、と感じた瞬間でした。

（参考にしたHP…「私的数学塾」 http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/reminder.htm ）

（2011年1月29日発表）