「グリコじゃんけん」への道　part.1

旭川南高校
岡崎　知之

０．はじめに

ＳＴＶテレビの「ブギウギ専務」という番組をご存じだろうか。上杉周大（うえすぎしゅうた）というタレントがプロデューサーの無理難題に挑戦するというバラエティー番組である。私は 10 年前からこの番組を見ているが、じゃんけんを使った企画が多く、専務（上杉周大）の一喜一憂に笑うと同時に、「専務はじゃんけんに強いのだろうか、弱いのだろうか？」という疑問も湧いていた。

そのじゃんけん企画の中で最も私の興味を惹いたのが、「グリコじゃんけん」である。この企画は番組開始 1～2 年頃の企画であるが、データ不足（ビデオを録り損なった）と数学力不足から解析を一時中断した。ところが今年企画が復活し、無事データも得ることができたので、再び解析に挑戦してみた。

１．ブギウギ版「グリコじゃんけん」のルール

スタート→ゴールを、小樽駅→札幌駅（36km）とし、グリコじゃんけんの勝敗により移動する。移動する距離は以下のとおり。

・グー（グリコ）で勝ち⇒３ｋｍ進む
負け⇒３ｋｍ戻る
・チョキ（チヨコレイト）・パー（パイナツプル）で勝ち…６ｋｍ進む
負け…６ｋｍ進む

ただし、ゴールには**ピタリ止まらないと上がれない**。

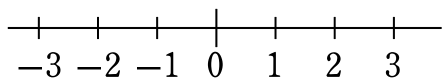
２．Warming up

☆このレポートを読みやすくするために、以下の課題に挑んでください。

数直線上の原点に駒を置き、コインを投げて　表→＋１　裏→－１　の移動を繰り返す。
このとき、駒が**７回目に初めて**＋１に到達する確率を求めよ。

（ヒント）

⑴　条件を満たすような移動方法を書き並べましょう。例の他ににいくつあるでしょうか？
（例）　（－－＋＋－＋）　（－－＋－＋＋）　（－＋－－＋＋）



⑵　求める確率は

（1）のパターン数

$$\boxed{} \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \qquad です。$$

３．課題

> ⑴　ブギウギ専務「グリコじゃんけん」企画において、専務は「25 回でゴール」したが、運が良いと言えるのか。（「運が良い」…６回～25 回の累計確率が 50%未満）
> ⑵　相手が数学的確率（1/3）で手を出し、専務が統計的確率（非 1/3）で手を出すとき、勝率を上げるためにはどのような出し方が有効か。

４．数学的課題への変換

☆移動距離は 3km or 6km、スタート→ゴール間の距離は 36km なので、3km＝１コマとして考える。

> Ａ，Ｂの２人がグリコじゃんけんを行う。このとき数直線上の原点に駒を置き、Ａの勝敗に応じて次のように駒を移動する。
>
> **グーで勝ち⇒＋１**　　　**チョキ・パーで勝ち⇒＋２**
>
> **負け⇒－１**　　　**負け⇒－２**
>
> ６～25 回じゃんけんを行い、最後のじゃんけんで駒が初めて＋12 の位置に止まる確率を求めよ。」

＊「Warming up」で体験していただいたように、この条件を満たす移動方法は膨大な個数となる。
課題を単純化し、そこから一般化させる方向で考える。

５．単純化

☆勝ち（負け）方によって移動距離が変わると複雑になるので、まずは移動距離を「±１」とする。

> 数直線上の原点に駒を置く。コインを投げて次のように駒を移動していく。
>
> 表⇒＋１　　　裏⇒－１
>
> n 回コインを投げたとき、n 回目に駒が初めて m (m>0)の位置に止まる確率を求めよ。

⑴ ゴールが「＋１」の場合

問題に適する駒の動きのアルゴリズムは以下のようになる。

> ①１～n-1 回目…$(-\infty, 0]$ （原点より左）の範囲を移動し、n-1 回目に原点に到達（$n \geq 2$）
> 　　↳ 同じ範囲をウロウロ ⇒「<u>wandering pattern</u>」と命名
>
> ②　n　回目…表が出て、ゴール（＋１）に到達

①の動き（＊表記　＋…表　－…裏）

n=2　１回で原点の左側をウロウロ　⇒　不可能

n=3　（－＋）

n=4　３回で原点の左側をウロウロ　⇒　不可能　＊以下「n が偶数のとき」は不可能なので省略。

n=5　（－－＋＋）　（－＋－＋）

n=7　（－－－＋＋＋）　（－＋－＋－＋）　（－－＋＋－＋）　（－－＋－＋＋）　（－＋－－＋＋）

以上より、移動パターンは

n	1	2	3	4	5	6	7
ﾊﾟﾀｰﾝ	1	0	1	0	2	0	5

ここで気になるのが、奇数列「1，1，2，5，…」である。この数列は「カタラン数」と一致する。

これはカタラン数（別紙資料で詳述）の応用例で有名な「（　）付けの方法の数」と「＋－の配置」が１対１に対応するからである。

☆「wandering pattern」の移動条件

(1)　＋の個数と－の個数は等しい

(2)　左端から連続する数を抜き出し部分列を作るとき、

（＋の個数）が（－の個数）を超えない

（例）（－－＋＋）の部分列…（－）（－－）（－－＋）（－－＋＋）

☆正しい（ ）付けの条件

「＋」を「)」、「－」を「（ 」に変換すれば、正しい（）付けになる。

（例）（－－＋＋）⇔　（（））　　例）（０＋（１＋２））

したがって、

「n 回コインを投げたとき、n 回目に駒が初めてmの位置に止まる確率」を $P_{(m,n)}$ とすると、

$$\boxed{P_{(1,2n-1)} = C_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} \qquad (n \geq 1)}$$

＊（表記注）$\binom{n}{r} = {}_nC_r$

ちなみに１～９９回の確率表は右（→）のとおりである。

（2）ゴールが「＋２」の場合

問題に適する駒の動きのアルゴリズムは以下のようになる。

① l（l<n）回目に初めて「＋１」に到達 ② n 回目に初めて「+2」に到達

＊以下、「○回目で初めて△に到達」を略記して、「○回で△に到達」と表記します。

（例）n=2　①１回で＋１に到達　②残り１回で＋２に到達

$$P_{(2,2)} = P_{(1,1)} \cdot P_{(1,1)} = C_0C_0\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

n=3　不可能（奇数回はすべて不可能）

n=4　①１回で＋１に到達　②残り３回で＋２に到達

$$P_{(1,1)} \cdot P_{(1,3)} = C_0C_1\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

①３回で＋１に到達　②残り１回で＋２に到達

$$P_{(1,3)} \cdot P_{(1,1)} = C_1C_0\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

以上より

$$P_{(2,4)} = P_{(1,1)} \cdot P_{(1,3)} + P_{(1,3)} \cdot P_{(1,1)} = C_0C_1\left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_1C_0\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

＋1でゴールする確率

回数	確率	累計
1	50.0%	50.0%
3	12.5%	62.5%
5	6.3%	68.8%
7	3.9%	72.7%
9	2.7%	75.4%
11	2.1%	77.4%
13	1.6%	79.1%
15	1.3%	80.4%
17	1.1%	81.5%
19	0.9%	82.4%
21	0.8%	83.2%
23	0.7%	83.9%
25	0.6%	84.5%
27	0.6%	85.1%
29	0.5%	85.6%
31	0.5%	86.0%
33	0.4%	86.4%
35	0.4%	86.8%
37	0.3%	87.1%
39	0.3%	87.5%
41	0.3%	87.8%
43	0.3%	88.0%
45	0.3%	88.3%
47	0.2%	88.5%
49	0.2%	88.8%
51	0.2%	89.0%
53	0.2%	89.2%
55	0.2%	89.4%
57	0.2%	89.6%
59	0.2%	89.7%
61	0.2%	89.9%
63	0.2%	90.1%
65	0.2%	90.2%
67	0.1%	90.4%
69	0.1%	90.5%
71	0.1%	90.6%
73	0.1%	90.8%
75	0.1%	90.9%
77	0.1%	91.0%
79	0.1%	91.1%
81	0.1%	91.2%
83	0.1%	91.3%
85	0.1%	91.4%
87	0.1%	91.5%
89	0.1%	91.6%
91	0.1%	91.7%
93	0.1%	91.8%
95	0.1%	91.9%
97	0.1%	92.0%
99	0.1%	92.0%

これらを一般化すると

$$P_{(2,2n)} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$ となる。

ここで、カタラン数の定義

$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$　（$C_0 = 1$）を利用し、

$$\boxed{P_{(2,2n)} = C_n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \quad (n \geq 1)}$$

ちなみに２～１００回の確率表は右（→）のとおりである。

（3）ゴールが「＋３」の場合

（例）n=7

７回　＝　２回で＋２→５回で＋３
　　　＝　４回で＋２→３回で＋３
　　　＝　６回で＋２→１回で＋３　なので、

$$P_{(3,7)} = P_{(2,2)} \cdot P_{(1,5)} + P_{(2,4)} \cdot P_{(1,3)} + P_{(2,6)} \cdot P_{(1,1)}$$

$$= C_1 C_2\left(\frac{1}{2}\right)^7 + C_2 C_1\left(\frac{1}{2}\right)^7 + C_3 C_0\left(\frac{1}{2}\right)^7 \quad \cdots (※)$$

これを一般化して、

$$P_{(3,2n-1)} = \left(\sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-1-k}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} - C_0 C_{n-1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$$

$$= (C_n - C_0 C_{n-1})\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} \quad (n \geq 2) \quad \cdots (※)$$

ここで問題が発生する。$P_{(m,n)}$ をカタラン数によって、簡潔に記述してきたが、m≥3 より単一のカタラン数で表記できなくなってしまった。

（例）上記（※）では

（理想の式↓）

$$P_{(3,7)} \neq C_0 C_3\left(\frac{1}{2}\right)^7 + C_1 C_2\left(\frac{1}{2}\right)^7 + C_2 C_1\left(\frac{1}{2}\right)^7 + C_3 C_0\left(\frac{1}{2}\right)^7 = C_4\left(\frac{1}{2}\right)^7$$

（現実の式↓）

$$P_{(3,7)} = C_1 C_2\left(\frac{1}{2}\right)^7 + C_2 C_1\left(\frac{1}{2}\right)^7 + C_3 C_0\left(\frac{1}{2}\right)^7 = (C_4 - C_0 C_3)\left(\frac{1}{2}\right)^7$$

＊カタラン数をまとめるために必要な積が不足する！

これはゴールが遠くなるほど、ゴールに到達不能なパターンが増えてしまい、その分の確率を減らす必要があるからである。（右図→）

		回数			
		1	3	5	7
ゴール	1	○	○	○	○
	3	×	○	○	○
	5	×	×	○	○
	7	×	×	×	○

＋2でゴールする確率

回数	確率	累計
2	25.0%	25.0%
4	12.5%	37.5%
6	7.8%	45.3%
8	5.5%	50.8%
10	4.1%	54.9%
12	3.2%	58.1%
14	2.6%	60.7%
16	2.2%	62.9%
18	1.9%	64.8%
20	1.6%	66.4%
22	1.4%	67.8%
24	1.2%	69.0%
26	1.1%	70.1%
28	1.0%	71.1%
30	0.9%	72.0%
32	0.8%	72.8%
34	0.8%	73.6%
36	0.7%	74.3%
38	0.6%	74.9%
40	0.6%	75.5%
42	0.6%	76.1%
44	0.5%	76.6%
46	0.5%	77.1%
48	0.5%	77.5%
50	0.4%	78.0%
52	0.4%	78.4%
54	0.4%	78.8%
56	0.4%	79.1%
58	0.3%	79.5%
60	0.3%	79.8%
62	0.3%	80.1%
64	0.3%	80.4%
66	0.3%	80.7%
68	0.3%	81.0%
70	0.3%	81.3%
72	0.3%	81.5%
74	0.2%	81.8%
76	0.2%	82.0%
78	0.2%	82.2%
80	0.2%	82.4%
82	0.2%	82.6%
84	0.2%	82.8%
86	0.2%	83.0%
88	0.2%	83.2%
90	0.2%	83.4%
92	0.2%	83.6%
94	0.2%	83.8%
96	0.2%	83.9%
98	0.2%	84.1%
100	0.2%	84.2%

（4）ゴールが「m」の場合

☆「wandering pattern」を利用すれば、ゴールを変更しても帰納的に計算が可能。

（例）　・$P_{(7,11)} = P_{(6,6)} \cdot P_{(1,5)} + P_{(6,8)} \cdot P_{(1,3)} + P_{(6,10)} \cdot P_{(1,1)}$

・$P_{(8,12)} = P_{(7,7)} \cdot P_{(1,5)} + P_{(7,9)} \cdot P_{(1,3)} + P_{(7,11)} \cdot P_{(1,1)}$

⇩

（一般化）　・$P_{(2m-1,2n-1)} = P_{(2m-2,2m-2)} \cdot P_{(1,2(n-m)+1)} + P_{(2m-2,2m)} \cdot P_{(1,2(n-m)-1)} + \cdots + P_{(2m-2,2n-2)} \cdot P_{(1,1)}$

$= \sum_{k=m}^{n}\left(P_{(2m-2,2k-2)} \cdot P_{(1,2(n-k)+1)}\right)$

$$\boxed{P_{(2m-1,2n-1)} = \sum_{k=m}^{n}\left(P_{(2m-2,2k-2)} \cdot C_{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-k)+1}\right)}$$

・$P_{(2m,2n)} = P_{(2m-1,2m-1)} \cdot P_{(1,2(n-m)+1)} + P_{(2m-1,2m+1)} \cdot P_{(1,2(n-m)-1)} + \cdots + P_{(2m-1,2n-1)} \cdot P_{(1,1)}$

$= \sum_{k=m}^{n}\left(P_{(2m-1,2k-1)} \cdot P_{(1,2(n-k)+1)}\right)$

$$\boxed{P_{(2m,2n)} = \sum_{k=m}^{n}\left(P_{(2m-1,2k-1)} \cdot C_{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-k)+1}\right)}$$

＊　$P_{(m,n)}$ を数列と見なすと、初期値である $P_{(1,2n-1)}$ や $P_{(2,2n)}$ を求めているので、漸化式（上記）を解けば、一般項が求められる。しかし、カタラン数では式をコンパクトに表せないので、あらためて組合せを用いて表現してみる。

（5）カタラン数を組み合せで表記する

☆カタラン数はもともと（有理数）×（組合せ）で表記されているが、様々な（組合せ）に変型が可能である。

（例）　$C_n = \boxed{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\frac{2n+1}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{{}_{2n+1}P_{n+1}}{(n+1)!} = \boxed{\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n+1}}$

この課題の解決には実際の確率を算出する必要があるので、可能な限り $P_{(m,n)}$ の(m,n)を使った組合せに変型するよう留意する。

（例）・$P_{(1,2n-1)} = C_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{2n-1}{n}\binom{2n-2}{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$　←不足分をかける

$$\boxed{P_{(1,2n-1)} = \frac{1}{2n-1}\binom{2n-1}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}}$$

・$P_{(2,2n)} = C_n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{2}{2n} \cdot \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$　←「2n」の部分を作る

$$\boxed{P_{(2,2n)} = \frac{2}{2n}\binom{2n}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}$$

・$P_{(3,2n-1)} = (C_n - C_0C_{n-1})\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} = \left(\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} - \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$

$= \frac{1}{2n-1}\left(\frac{2n-1}{n+1}\binom{2n}{n} - \frac{2n-1}{n}\binom{2n-2}{n-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{2n-1}{n+1} \cdot \frac{2n}{n}\binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$

$= \frac{1}{2n-1}\left(\frac{2(2n-1)}{n-1} \cdot \frac{n(n-1)}{(n+1)n}\binom{2n-1}{n-1} - \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n+1}\binom{2n-1}{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$　←不足分をかける

$$=\frac{1}{2n-1}\left(\frac{2(2n-1)}{n-1}\binom{2n-1}{n+1}-\frac{n+1}{n-1}\binom{2n-1}{n+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}=\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{2(2n-1)-(n+1)}{n-1}\binom{2n-1}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$$

$$=\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{3n-3}{n-1}\binom{2n-1}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$$

$$\boxed{P_{(3,2n-1)}=\frac{3}{2n-1}\binom{2n-1}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}}$$

各確率の組合せの部分について

m=1　のとき $\binom{2n-1}{n}$　　m=4　のとき $\binom{2n}{n+2}$

m=2　のとき $\binom{2n}{n+1}$　　…

m=3　のとき $\binom{2n-1}{n+1}$　　から（↗）　m=2k+1, 2k　のとき $\binom{2n-1}{n+k}$, $\binom{2n}{n+k}$　と推測できる。

また、2n-1 , 2n をｎと書き換えると、ｎ は $\frac{n+1}{2}$ ， $\frac{n}{2}$ と書き換えられるので、

$P_{(m,n)}$ の一般項は次のように推測される。

$$P_{(m,n)}=\begin{cases}\frac{m}{n}\binom{n}{\frac{n+1}{2}+k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n} & (m=2k+1)\\ \frac{m}{n}\binom{n}{\frac{n}{2}+k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n} & (m=2k)\end{cases}$$　（k は0を含む自然数）

さらに、m=2k+1 ，m=2k のとき　$k=\frac{m-1}{2}$ ，$k=\frac{m}{2}$　なので、k を使わずに表現すると、

$$\boxed{P_{(m,n)}=\frac{m}{n}\binom{n}{\frac{m+n}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}$$

という簡単な形になる。

⑹ ⑸で推測した一般項を帰納法で証明する（仮？）

① m=1 のとき　推測の根拠としているので、明らか。

② m=k のとき成り立つと仮定すると

$$\boxed{P_{(k,n)}=\frac{k}{n}\binom{n}{\frac{n+k}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}$$　…（※）

m=k+1 のとき

$$P_{(k+1,n)}=P_{(k,k)}\cdot P_{(1,n-k)}+P_{(k,k+2)}\cdot P_{(1,n-(k+2))}+\cdots+P_{(k,n-1)}\cdot P_{(1,1)}$$　＊n は（※）の n とは異なる。

$$=\sum_{i=0}^{\frac{n-k-1}{2}}P_{(k,k+2i)}\cdot P_{(1,n-(k+2i))}$$

$$=\sum_{i=0}^{\frac{n-k-1}{2}}\left[\left\{\frac{k}{k+2i}\binom{k+2i}{k+i}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2i}\right\}\cdot\left\{\frac{1}{n-(k+2i)}\binom{n-(k+2i)}{\frac{1+n-(k+2i)}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-(k+2i)}\right\}\right]$$

$$=\sum_{i=0}^{\frac{n-k-1}{2}}\left[\left\{\frac{k}{(k+2i)(n-(k+2i))}\binom{k+2i}{i}\binom{n-(k+2i)}{\frac{1+n-(k+2i)}{2}}\right\}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]$$　$\leftarrow\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ を利用。

$$=\left(\sum_{i=0}^{\frac{n-k-1}{2}}\left\{\frac{k}{(k+2i)(n-(k+2i))}\binom{k+2i}{i}\cdot\binom{n-(k+2i)}{\frac{1+n-(k+2i)}{2}}\right\}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$　…

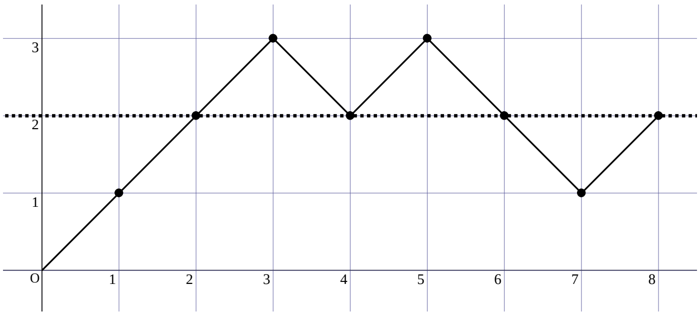
…と、ここまでは順調だったが、combination の積和が一体化できず、挫折。後日のお楽しみとする。

⑺ 全体構造から考え直す

これまでの公式導出のアルゴリズムは以下の順であった。

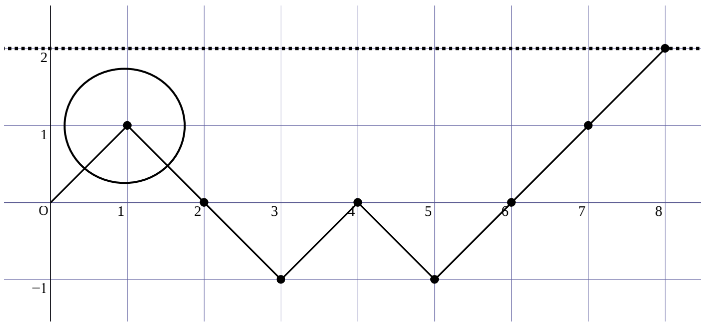
① 原点とその左側を往来するパターン（「wandering pattern」）を調べた。
② n 回目で初めて＋１に到達するパターンを調べた。
③ n回目で初めて＋2，+3，…，＋m に到達するパターンを推測した。

ここで発想を逆転し、**「初めてではない」**パターンを調べてみる。
例えば、以下のようなパターンである。（☆）



（コマの動き）
（＋＋＋－＋－－＋）

このコマの動きを逆にしてみる。すると「初めて」パターンになる。

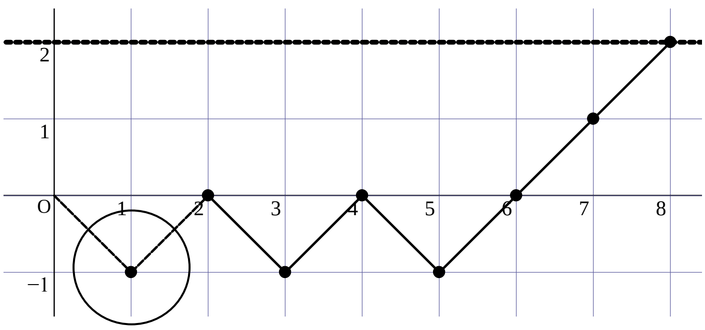


（コマの動き）
（＋－－＋－＋＋＋）

ここで注意したいのが、最初の（☆）のパターンは、「原点を除き、駒の位置が常に正」の場合のみ、「初めて」パターンと全単射の関係になるということである。このことから、

（初めて到達する確率）＝（常に正の位置の状態で到達する確率）　である。

※（0以下の位置を経由して到達する確率）　←「常に正の位置」の否定
上のグラフの「0回～初めて0に到達する回」をｘ軸に関して対称移動すると、下のようになる。



この方法で「0以下を経由するパターン」は「１回目に「－１」にいるパターン」と全単射の関係になる。よって

（常に正の位置で到達する確率）＝（１回目に「＋１」にいる確率）－（１回目に「－１」にいる確率）

である。

ｎ回の試行において、「＋１」移動する回数をｒ（回)、「－１」移動する回数をn-r（回）とすると、ゴールは m=r-(n-r)=2r-n となり、このときの移動方法は以下のとおり。

・「１回目に「＋１」にいる確率」
…①１回目の位置は「＋１」
②残り（n-1）回のうち、（ｒ－１）回分「＋１」移動する

よって、確率は　$\binom{n-1}{r-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

・「１回目に「－１」にいる確率」
…①１回目の位置は「－１」
②残り（n-1）回のうち、ｒ回分「＋１」移動する

よって、確率は　$\binom{n-1}{r}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

以上より、
「初めて到達する確率」は、

$$\binom{n-1}{r-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n-\binom{n-1}{r}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left\{\frac{r}{n}\cdot\frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}-\frac{n-r}{n}\cdot\frac{n}{n-r}\binom{n-1}{r}\right\}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=\left\{\frac{r}{n}\cdot\binom{n}{r}-\frac{n-r}{n}\binom{n}{r}\right\}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=\frac{2r-n}{n}\binom{n}{r}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=\boxed{\frac{m}{n}\binom{n}{\frac{m+n}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

となり、(5)で推測した一般項が正しいことが確認できた。

６．「part.2」へ向けて

今回の解析で、「グリコじゃんけん」への足掛かりを得ることができた。
しかし、本題を解決するためには以下の課題がある。

(1) 確率が変化
数学的確率（同様に確からしい）で考えれば、ある種類の手で勝つ（負ける）確率は移動距離ごとに次のように変化。
（＋１（または－１）の確率）＝ $\frac{1}{6}$　　（＋２（または－２）の確率）＝$\frac{1}{3}$

(2) パターン数が変化
勝ち（負け）の種類が２種類から４種類に増え、パターン数も増加。

(3) ゴールの跳び越し（「jumping」と命名）が発生
「ピタリ止まらないと、上がれない」から、跳び越すとゴールできない。

「グリコじゃんけん」への道は、まだまだ続く…

７．感想

数学的帰納法を用いた証明で行き詰まったとき、「グラフ変換（５-(7)）」のような論理的手法の強さを感じた。様々な角度から問題に挑む経験をこれからも積んでいきたい。

（参考資料）
「ブギウギ専務」（札幌テレビ放送／2007～現在放送中　＊日曜日 23:25 - 23:55（30 分））
「ランダム・ウォーク　乱れに潜む不思議な現象」（津野義道／牧野書店）
「カタラン数」（山上滋／茨城大学 http://sss.sci.ibaraki.ac.jp/teaching/catalan.pdf）
「じゃんけんグリコの最適戦略と東大の問題」（マスオ／高校数学の美しい物語 http://mathtrain.jp/grk）
「数学ガール」（結城浩／ソフトバンク・クリエイティブ）
「Eugène Charles Catalan」
（wikipedia／https://en.wikipedia.org/wiki/Eug%C3%A8ne_Charles_Catalan）

（余談）
このレポートは独自に研究をしたので、正式な数学用語が使われていない部分があります。
「ランダムウォーク（酔歩論）」で扱われる用語を念のため紹介します。

今回のレポート	専門用語
移動パターン	経路
スタート位置に戻る	原点復帰
wandering pattern	負の辺のみからなる経路が n 回目に原点復帰する場合
x 軸に関して対称移動したグラフ	鏡像
駒の動きを逆にした動き	双対経路

＊レポート作成後、正式名称に直すことも検討しましたが、専門用語を避けた方が分かりやすいと考え、修正しませんでした。

（カタラン数（Catalan number））
ベルギーの数学者ウジェーヌ・カタラン（Eugène Charles Catalan 1814-1894）
に因んでつけられた数。

漸化式 $\boxed{\mathrm{C}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_k \mathrm{C}_{n-k} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \quad (\mathrm{C}_0 = 1)}$ で定義される。

汎用性が高く、応用例は多数存在するが、今回のレポート内で説明した
「（　）付けの方法」での利用法を説明する。

Q.　n 個の自然数の和を考える。この和の計算式に（）を入れる方法は何通りあるか？

（例）　1　→　（1）　⇒　$C_0 = 1$
1＋2　→　（1＋2）　⇒　$C_1 = 1$
1＋2＋3　→　((1＋2）＋3）　（1＋（2＋3））　⇒　$C_2 = 2$
1＋2＋3＋4　→　(((1＋2）＋3）＋4）　((1＋（2＋3））＋4）　…　⇒　$C_3 =?$

外側の（　）に注目すると、1＋2＋3は　「(1）と（2＋3)」「(1＋2）と（3)」に分割されており、帰納的に「　$C_2 = C_0C_1 + C_1C_0$　」が成り立つ。この原理から、「（　）付けの方法」と「カタラン数」は一致する。

（+12 でゴールする確率）

「ブギウギ専務」の場合、ゴールが+12 であることから公式を使って確率を算出してみた（右表→）。番組では 25 回でゴールしたが、右表の場合「±１」の移動のみなので、25 回のデータはない。

しかし近い値（24・26 回）を見ても１～２％程度であることが分かる。おそらく「±２」を取り入れることにより、確率が大幅に増えるのではないだろうか。

＋12でゴールする確率

回数	確率	累計
12	0.0%	0.0%
14	0.1%	0.1%
16	0.1%	0.2%
18	0.2%	0.4%
20	0.3%	0.7%
22	0.3%	1.1%
24	0.4%	1.5%
26	0.5%	1.9%
28	0.5%	2.4%
30	0.5%	2.9%
32	0.6%	3.5%
34	0.6%	4.1%
36	0.6%	4.7%
38	0.6%	5.3%
40	0.6%	6.0%
42	0.6%	6.6%
44	0.6%	7.2%
46	0.6%	7.9%
48	0.6%	8.5%
50	0.6%	9.2%
52	0.6%	9.8%
54	0.6%	10.5%
56	0.6%	11.1%
58	0.6%	11.7%
60	0.6%	12.4%
62	0.6%	13.0%
64	0.6%	13.6%
66	0.6%	14.2%
68	0.6%	14.8%
70	0.6%	15.4%
72	0.6%	16.0%
74	0.6%	16.5%
76	0.6%	17.1%
78	0.6%	17.7%
80	0.5%	18.2%
82	0.5%	18.7%
84	0.5%	19.3%
86	0.5%	19.8%
88	0.5%	20.3%
90	0.5%	20.8%
92	0.5%	21.3%
94	0.5%	21.8%
96	0.5%	22.3%
98	0.5%	22.8%
100	0.5%	23.2%

（高校数学への応用）

この「ランダムウォーク」の初歩的な問題は、入試問題でもしばしば散見される。$P_{(m,n)}=\frac{m}{n}\binom{n}{\frac{m+n}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$を利用して解くことができる、高校レベルの問題を作成してみた。

Q．原点をスタート位置とし、さいころを振った出目によって移動を繰り返し、ゴールを目指すゲームを行う。

出目と移動距離は以下のとおりである。

（出目）１～４　→　＋１

５・６　→　－１

ゲームの終了条件を次のようにした場合の、各確率を求めよ。

⑴「「＋１」に到達したら終了」とするとき、３回でゲームが終了する確率を求めよ。

⑵「「＋２」に到達したら終了」とするとき、６回でゲームが終了する確率を求めよ。

⑶「６回目に「＋２」の位置にいたら終了」とする。ゲームが終了したとき、「＋２」の位置に到達するのが６回目で初めてである条件付き確率を求めよ。

（解法）

次のように公式を変型し、代入する。

$$P_{(m,n)}=\frac{m}{n}\binom{n}{\frac{m+n}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{m}{n}\binom{n}{\frac{m+n}{2}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^r\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-r}$$

⑴　$P_{(1,3)}=\frac{1}{3}\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{4}{27}$　（←この程度なら公式不要ですね。）

⑵　$P_{(2,6)}=\frac{2}{6}\binom{6}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{80}{729}$　（←高校生なら、$P_{(1,5)}\cdot P_{(1,1)}+P_{(1,3)}\cdot P_{(1.3)}+P_{(1,1)}\cdot P_{(1.5)}$でしょうか？）

⑶ ６回目に「＋２」　⇒　「＋１」×４＋「－１」×２　⇒　$\binom{6}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$

求める確率は　$\dfrac{\frac{2}{6}\binom{6}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\binom{6}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}$　。

（現実的課題への応用）

今回のレポートで得た公式は、次のような
現実的課題も解決する。

＜選挙の開票経過＞
候補者Ｔ氏・Ｃ氏が選挙で当選を争うとする。
このとき、右表のようなデータを得た。

候補者	得票数
Ｔ氏	６，０００
Ｃ氏	４，０００
計	１０，０００

Ｑ．この選挙の開票速報を行うとき、
「Ｔ氏の得票が常にＣ氏の得票を上回る確率」を求めよ。

（解法）
Ｔ氏の得票を「１票＝＋１ポイント」、Ｃ氏の得票を「１票＝－１ポイント」とカウントする。
また、１票が確定するごとに開票速報を行う（すなわち 10,000 回速報を行う）と考える。
Ｔ氏の得票がＣ氏の得票を常に上回るとすれば、２人のポイントの和は常に正である。

よって、この問題は次のような数学的課題に変換できる。

Ｑ．数直線上の原点に駒を置く。コインを投げて次のように駒を移動していく。
表⇒＋１　　　裏⇒－１
10,000 回コインを投げたとき、駒が常に正の位置にいる確率を求めよ。

ここで、
・（ゴール）＝６０００－４０００＝２０００

・（原点からゴールまでの移動方法の個数）＝ $\binom{10000}{6000}$ …（★）

・（（★）のうち、題意を満たす移動方法の個数）＝ $\frac{2000}{10000}\binom{10000}{\frac{2000+10000}{2}}=\frac{1}{5}\binom{10000}{6000}$

よって、求める確率は

$\frac{\frac{1}{5}\binom{10000}{6000}}{\binom{10000}{6000}}=\frac{1}{5}$　となり、20%である。

また、Ｔ氏の得票数をｐ，Ｃ氏の得票数をｑとすると、
この確率は

$\boxed{\frac{m}{n}=\frac{p-q}{p+q}}$　という簡潔な式で表現される。

q-p	2,064,621
q+p	126,440,125
確率	0.0159

ちなみに先日の米大統領選では
トランプ氏　　62,212,752 票　／　クリントン氏　　64,227,373 票
（「クック・ポリティカル・リポート（Cook Political Report）」の調査結果による）
となっており、仮に問題のような条件で当落を決定するならば、クリントン氏が
常に優勢となる確率は、右表のように約 1.6%となり、接戦だったことが窺える。

（第 99 回数学教育実践研究会にて発表）